2.3 Zahlenreihen

2.3.1 Reihen

Für $n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ sei $a_n \in \mathbb{R}$. Dann ist die *Reihe* $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ definiert als die Folge (S_m) der *Partial-* oder *Teilsummen* $S_m := \sum\limits_{n=n_0}^{m} a_n$.

Eine Reihe ist also per Definitionem genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen konvergiert.

Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, etwa gegen $S = \lim\limits_{m\to\infty} S_m = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=n_0}^{m} a_n$, so bezeichnet $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ auch diesen *(Grenz-) Wert* S der Reihe.

Abändern endlich vieler Summanden einer Reihe ändert nichts daran, daß die Reihe konvergiert bzw divergiert. Aber natürlich ändert sich dadurch i.a. der Wert der Reihe. Wenn es nicht auf den Wert, sondern nur auf Konvergenz oder Divergenz ankommt, schreibt man oft $\sum a_n$ statt $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$.

Eine Reihe $\sum a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_n|$ konvergiert. Eine Reihe, die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.

Absolut konvergente Reihen sind konvergent, aber nicht umgekehrt.

Z.B. konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nach dem Leibniz-Kriterium. Sie ist aber nicht absolut konvergent, da die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

Jede Reihe ist die Folge ihrer Partialsummen. Umgekehrt ist auch jede Folge die Partialsummenfolge einer Reihe, denn:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \ = \ a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) \ = \ a_n .$$

Reihen, die man bequem in der Form $\sum (a_k - a_{k-1})$ darstellen und dadurch auswerten kann, nennt man häufig *Teleskop-Reihen.*

Beispiele

1) Die *geometrische Reihe* $\quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad$ konvergiert für $|x| < 1$.

2) Die *harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. (Siehe 2.4.3.A)

Allgemeiner: die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ ist genau dann konvergent, wenn $a > 1$.

3) Die *Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$.

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Rechenregeln

1) Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch $\sum(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent.
(Die konvergenten Reihen bilden also einen Vektorraum und die Abbildung, die jeder konvergenten Reihe ihren Wert zuordnet, ist linear.)

2) Sind $\sum a_n$ und $\sum b_n$ konvergent und $a_n \leq b_n$ für alle n, so ist $\sum a_n \leq \sum b_n$.

3) Eine absolut konvergente Reihe $\sum a_n$ ist auch konvergent und es gilt $|\sum a_n| \leq \sum |a_n|$.

4) Ist die Folge (b_k) beschränkt und die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_k b_k$ absolut.
Diese Aussage wird falsch, wenn man 'absolut konvergent' durch konvergent' ersetzt. (Siehe Aufgabe 2.4.2.)

Die Ungleichungen von Hölder, Cauchy-Schwarz usw aus Abschnitt 1.3.6 übertragen sich auf unendliche Reihen. Z.B. gilt

Cauchy-Schwarz-Ungleichung für unendliche Reihen
Konvergieren die beiden Reihen $\sum a_n^2$ und $\sum b_n^2$, so konvergiert die Reihe $\sum a_n b_n$ absolut und es gilt

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} .$$

2.3.2 Konvergenzkriterien

Es gibt kein allgemeines Verfahren, die Konvergenz einer beliebigen Reihe nachzuweisen, und schon gar nicht, ihren Grenzwert exakt zu bestimmen. Es gibt jedoch sehr viele verschiedene Konvergenz-Kriterien, deren Anwendung zum Ziel führen kann, aber nicht muß. Besonders wichtig für absolut konvergente Reihen sind die Vergleichskriterien des nächsten Abschnitts.
Ein klassisches Standardwerk zur Reihentheorie ist das Buch von Konrad Knopp:

'Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen', eine Fundgrube von Sätzen und Beispielen.

a) Trivialkriterium
Ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent, so gehen die Summanden $a_n \to 0$.
Bzw: Streben die Summanden nicht gegen Null, so divergiert die Reihe.

Achtung: Die Umkehrung ist falsch! Zum Beispiel divergiert die harmonische Reihe, obwohl ihre Summanden gegen Null gehen.

Nehmen die Summanden einer konvergenten Reihe monoton ab, so müssen sie 'schneller' als $1/n$ gegen Null gehen. Es gilt nämlich der

Satz von Olivier (Beweis siehe Aufgabe 2.4.6.B.)
Ist $\sum a_n$ konvergent und (a_n) monoton fallend, so gilt $n\,a_n \to 0$.

b) Monotoniekriterium
Sind alle Summanden $a_n \geq 0$, so ist die Reihe $\sum a_n$ genau dann konvergent, wenn ihre Teilsummenfolge beschränkt ist.

Eins der wenigen notwendig und hinreichenden Kriterien ist das

c) Cauchy-Kriterium
Die Reihe $\sum a_n$ ist genau dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, von dem ab alle Reihenabschnitte dem Betrage nach kleiner ε sind.

$$\sum a_n \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, m \geq n \geq n_0\ :\ \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon\ .$$

d) Integralkriterium für Reihenkonvergenz (Beweis siehe Aufgabe 5.5.3.B)

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $f\colon [n_0, \infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{n_0}^{\infty} f(t)\,dt \text{ konvergiert}\ .$$

Kriterien für nicht notwendig absolut konvergente Reihen

e) Leibniz-Kriterium
Sei $\sum a_n$ eine *alternierende* Reihe, d.h. die Summanden a_n haben abwechselndes Vorzeichen ($a_n a_{n+1} < 0$). Ist $(|a_n|)$ eine *monoton* fallende Nullfolge, so ist die Reihe $\sum a_n$ konvergent.

Dabei gilt für die Reihenabschnitte bzw Reihenreste die Abschätzung:

$$\left|\sum_{n=n_0}^{m} a_n\right| \ \leq\ |a_{n_0}| \quad \text{und} \quad \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n\right| \ \leq\ |a_{n_0}|\ .$$

Achtung: Die Monotonie der Folge $|a_n|$ ist wesentlich!
Sei z.B. $c_{2n} := -\frac{1}{2^n}$ und $c_{2n-1} := \frac{1}{n}$. Dann ist $\sum c_n$ eine Reihe, die divergiert, obwohl ihre Summanden eine Nullfolge mit wechselndem Vorzeichen bilden.

f) Dirichlet-Kriterium
Die Reihe $\sum a_n$ habe beschränkte Partialsummen und die Folge (b_n) sei eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n b_n$.

(Mit $a_n := (-1)^n$ folgt das Leibniz-Kriterium aus dem Dirichlet-Kriterium.)

g) Abelsches Kriterium
Sei (b_n) eine monoton fallende Folge positiver Zahlen und sei $\sum a_n$ konvergent. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_n b_n$.

2.3.3 Vergleichskriterien

a) Majorantenkriterium
Gilt $0 \leq |a_n| \leq b_n$ ab einem n_0 und ist die *Majorante* $\sum b_n$ konvergent, so konvergiert $\sum a_n$ absolut.

b) Minorantenkriterium
Gilt $0 \leq a_n \leq b_n$ ab einem n_0 und ist die *Minorante* $\sum a_n$ divergent, so divergiert auch $\sum b_n$.

(Minoranten- und Majoranten-Kriterium sind äquivalent. Das eine folgt durch Kontraposition sofort aus dem anderen!)

c) Grenzwertkriterium
Seien a_n, b_n positiv und für $n \to \infty$ strebe der Quotient $\frac{a_n}{b_n}$ gegen einen positiven reellen Grenzwert $0 < q < \infty$.
Dann sind die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.
(Siehe Aufgabe 2.4.4.A für eine allgemeinere Fassung.)

Achtung: Die Voraussetzung $a_n, b_n > 0$ ist wesentlich!
Seien etwa $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ und $b_n := \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.
Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n$ nach dem Leibniz-Kriterium und die Reihe $\sum b_n$ divergiert, da die harmonische Reihe divergiert. Es gilt aber $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$.

d) Verdichtungskriterium

Sei (a_k) eine monoton fallende Nullfolge. Dann sind die beiden Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Wurzel- und Quotientenkriterium

Vergleicht man die zu untersuchende Reihe mit der geometrischen, so erhält man:

e) **Quotientenkriterium**
Sei $\sum a_n$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$. Ferner gebe es ein (festes!) $q < 1$ derart, daß $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ ab einem Index n_0. Dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Insbesondere gilt dies, wenn der Grenzwert $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert und < 1 ist.

f) **Wurzelkriterium**
Für ein (festes!) $q < 1$ gelte $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ ab einem Index n_0.
Dann ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Insbesondere gilt dies, wenn der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert und < 1 ist.

g) **Divergenzaussagen**: Aus dem Trivialkriterium folgt: Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, oder gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle n ab einem n_0, so divergiert die Reihe $\sum a_n$. Insbesondere gilt dies, wenn der Grenzwert $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ oder der Grenzwert $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert und größer als 1 ist.

Achtung: Im Fall $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ bzw $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ ist ohne Zusatzinformation keine Entscheidung über Konvergenz oder Divergenz möglich.
Z.B. gilt für die beiden Reihen $\sum \frac{1}{n}$ und $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \lim \sqrt[n]{|a_n|} \ = \ 1 \ .$$

Die erste Reihe ist divergent, die zweite konvergent.

Faustregel: Wurzel- und Quotientenkriterium entstehen beide durch Vergleich mit der geometrischen Reihe. Daher wird, falls eins von ihnen keine Entscheidung liefert, i.a. auch das andere versagen.
Aus Aufgabe 2.2.10.B folgt nämlich:

$$\text{Ist } \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \text{ , so gilt auch } \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \ .$$

Falls der Grenzwert $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ existiert, gilt auch die Umkehrung.
Beachte aber folgendes

Beispiel: Die Summanden der Reihe $\sum a_n$ seien definiert durch
$a_{2k} := 2^{-k}$ und $a_{2k-1} := 3^{-k}$.
Wegen $\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \left(\frac{3}{2}\right)^k \to \infty$ und $\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \to 0$ für $k \to \infty$

liefert das Quotientenkriterium keine Entscheidung.
Aber wegen $\sqrt[2k]{2^{-k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ und $\sqrt[2k\text{-}1]{3^{-k}} \to \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ liefert das Wurzelkriterium die Konvergenz der Reihe $\sum a_n$.

Eine Verfeinerung des Quotientenkriteriums ist das

h) Raabe-Kriterium (Beweis siehe Aufgabe 2.4.4.B.)
Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{\beta}{n}$ für eine (von n unabhängige) Konstante $\beta > 1$ und für alle n ab einem Index n_0, so ist die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergent.

Sie ist divergent, wenn ab einem Index n_0 stets gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$.

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ist eine konvergente Reihe, für die $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2.3.4 Klammersetzen in Reihen

Seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine beliebige reelle Reihe, $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 = 1$. Die Trennindices n_k zerlegen die Reihe $\sum a_n$ in die Reihenabschnitte $b_k := (a_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}-1})$.

Man sagt, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ aus der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ durch *Klammersetzen* hervorgeht.

Klammersetzen in einer konvergenten Reihe ändert nicht ihren Wert.
Die Partialsummenfolge der geklammerten Reihe ist ja nur eine Teilfolge der Partialsummenfolge der ursprünglichen Reihe.

Aber durch Klammersetzen kann aus einer divergenten Reihe eine konvergente werden. Und durch verschiedene Klammerung kann man aus einer divergenten Reihe konvergente Reihen mit verschiedenen Grenzwerten erhalten. (Das ist überhaupt nicht verblüffend, da die Konvergenz einer Teilfolge nichts über die Konvergenz der Gesamtfolge oder anderer Teilfolgen aussagt.) Ein klassisches Beispiel ist die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$.
Durch Klammerung erhält man die beiden konvergenten Reihen

$$\begin{array}{lrcl} & (-1+1) + (-1+1) + \ldots & = & 0 + 0 + \ldots \ = \ 0 \\ \text{und} & -1 + (1-1) + (1-1) + \ldots & = & -1 + 0 + 0 + \ldots \ = \ -1 \ . \end{array}$$

Vergleiche dazu die Aufgabe 2.4.10.

2.3.5 Umordnen von Reihen

Ist $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so heißt $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Allgemeiner ist der Begriff der *totalen Umordnung:*

Sei $\mathbb{N} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots$ eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{N}$ in endlich oder abzählbar viele nicht-leere Teilmengen M_j. Für alle j sei $S_j := \sum_{k \in M_j} a_k$.

Wenn diese Reihen sämtlich konvergieren, ist die Reihe $\sum_j S_j$ definiert und heißt *totale Umordnung* der Ausgangsreihe $\sum_n a_n$.

Jede Umordnung $\sum a_{\varphi(k)}$ im engeren Sinne kann als totale Umordnung mit einelementigen Teilmengen $M_k := \{\varphi(k)\} \subset \mathbb{N}$ aufgefasst werden.

Beispielsweise ist $a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$ eine Umordnung und $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) + (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ eine totale Umordnung von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (falls die Reihen über die geraden bzw die ungeraden Indizes konvergieren).

Umordnen von Reihen kann sowohl das Konvergenzverhalten, als auch den Grenzwert ändern. Es gilt aber:

Großer Umordnungssatz
Ist die Reihe $\sum a_n$ <u>absolut</u> konvergent, so konvergiert auch jede ihrer (totalen) Umordnungen absolut und zwar mit demselben Grenzwert.

Eine Art Umkehrung davon ist:

Riemannscher Umordnungssatz
Sei $\sum a_n$ eine konvergente, aber <u>nicht absolut</u> konvergente Reihe.
Dann existiert zu beliebigen $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\alpha \leq \beta$, eine Umordnung von $\sum a_n$ derart, daß für die neue Teilsummenfolge $(S_n)_n$ gilt: $\liminf S_n = \alpha$ und $\limsup S_n = \beta$.
Insbesondere gibt es zu jedem $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}$ eine gegen σ konvergente Umordnung.

2.3.6 Doppelfolgen und -Reihen

Eine Abbildung $\alpha\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\alpha(j,k) =: a_{j,k}$ heißt (reelle) *Doppelfolge*. Eine solche Doppelfolge $(a_{j,k})_{j,k}$ heißt konvergent gegen a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n, m > n_0$ der Abstand $|a_{n,m} - a| < \varepsilon$ ist.

Eine *Doppelreihe* $\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k}$ wird als Doppelfolge ihrer Teilsummen

$$S_{n,m} := \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{j,k} \right) \text{ definiert.}$$

Ist $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\Phi(k) = (\varphi(k), \psi(k))$ eine Abzählung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so heißt die Reihe $\sum_k a_{\varphi(k),\psi(k)}$ eine *Aufzählung* der Doppelreihe $\sum a_{n,m}$.

Eine Doppelreihe ist (als Doppelfolge ihrer Teilsummen) genau dann konvergent, wenn sie bzgl jeder ihrer Aufzählungen konvergiert. Dagegen folgt aus der Konvergenz bzgl *einer* Aufzählung noch lange nicht die Konvergenz bzgl einer anderen. Es gilt aber:

Cauchyscher Doppelreihensatz
Die Doppelreihe $\sum a_{n,m}$ sei bzgl einer Aufzählung absolut konvergent.
Dann ist sie bzgl jeder Aufzählung absolut konvergent und zwar mit demselben Grenzwert. Insbesondere gilt

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} a_{j,k} \;=\; \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}\right) \;.$$

(*Summe der Zeilensummen gleich Summe der Spaltensummen*)

2.3.7 Reihenprodukte

Die Doppelreihe $\sum\limits_{j,k} a_j b_k$ und auch irgendeine ihrer Aufzählungen heißt ein *Produkt* der beiden Reihen $\sum a_j$ und $\sum b_k$.

Ein spezielles Reihenprodukt ist das besonders für Potenzreihen angemessene

a) Cauchy-Produkt

Seien $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen und für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$c_n \;:=\; \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \;=\; a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 \;.$$

Dann heißt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ das *Cauchy-Produkt* der beiden Ausgangsreihen.

Aus dem Cauchyschen Doppelreihensatz (2.3.6) folgt, daß jedes Produkt zweier absolut konvergenter Reihen absolut konvergiert, insbesondere auch ihr Cauchy-Produkt. Für das Cauchy-Produkt gelten darüberhinaus die folgenden beiden Verschärfungen:

b) Satz von Mertens (Beweis siehe Aufgabe 2.4.12.D)

Sind die beiden Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und mindestens eine davon absolut konvergent, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und zwar mit dem Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) .$$

c) Satz von Abel (Beweis siehe Aufgabe 4.4.7.B)

Die beiden Reihen $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ seien konvergent und ebenso ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) .$$