2.4 Aufgaben

2.4.1 Geschlossene Auswertung unendlicher Reihen

In Praxis ist die geschlossene Auswertung unendlicher Reihen, also die explizite Bestimmung des Grenzwerts, nur selten möglich. Bequem geht es, wenn man die Reihe als Teleskopreihe oder als Spezialfall bekannter Funktionenreihen erkennt. Hier folgen einige einfache Beispiele. Ein schwieriges finden Sie in Aufgabe 5.5.5.D .

$\boxed{\text{A}}$ Zeigen Sie, daß $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$. *(Geometrische Reihe)*

$\boxed{\text{B}}$ Sind die folgenden Reihen konvergent? Wenn ja, bestimmen Sie ihren Grenzwert!

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \qquad\qquad (2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2}$$

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Nach Aufgabe 1.4.5.A gilt $\displaystyle S_n := \sum_{k=0}^{n} x^k \;=\; \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Falls $|x| < 1$ gilt $x^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$. Nach den Rechenregeln für Folgen gilt daher für die Partialsummen : $S_n \to \dfrac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

Also ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$.

$\boxed{\text{B}}$ **(1)** Die Reihe $\sum\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$ ist eine divergente Teleskop-Reihe, denn

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right) \;&=\; (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \ldots + \left(\sqrt{2} - \sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{1} - \sqrt{0}\right) \\ &=\; \sqrt{n} - \sqrt{0} \;=\; \sqrt{n} \;\to\; \infty \;.\end{aligned}$$

(2) Auch die 2. Reihe läßt sich als Teleskopreihe auffassen. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2\,(k+1)^2} \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \\ &=\; \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &=\; 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \;\to\; 1 \quad \text{für } n \to \infty \;.\end{aligned}$$

2.4.2 Anwendung des Monotonie-Kriteriums

A Die Folge (b_k) sei beschränkt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut.

B Beweisen Sie das *Verdichtungskriterium* (2.3.3.d) :
Bilden die Summanden a_k eine monoton fallende Nullfolge, so sind die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Lösungen:

A Es muß gezeigt werden, daß die Folge der Partialsummen
$S_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$ beschränkt ist.
Die Folge (b_k) ist nach Voraussetzung beschränkt, etwa $|b_k| < B$ für alle k.
Da die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert, sind die Partialsummen $A_n := \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ beschränkt, etwa $A_n < A$. Wegen

$$0 \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq B \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq BA$$

folgt die Behauptung.

Bemerkungen: 1) Natürlich kann man dies Resultat auch mit dem Majorantenkriterium beweisen (Übungsaufgabe!).

2) Die Behauptung wird falsch, wenn man *absolut konvergent* durch *konvergent* ersetzt. Als Beispiel können Sie die nach dem Leibniz-Kriterium konvergente Reihe $\sum(-1)^n/n$ nehmen. Multipliziert man die Summanden mit der beschränkten Folge $(-1)^n$, so erhält man die divergente harmonische Reihe $\sum 1/n$.

B Sei zunächst die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. Gezeigt wird, daß dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert. Für die Partialsummen dieser Reihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} 2^n a_{2^n} &= (a_2+a_2)+(a_4+a_4+a_4+a_4)+\ldots+(\overbrace{a_{2^N}+a_{2^N}+\ldots+a_{2^N}}^{2^N \text{ Summanden}}) \\
&= 2\,\Big[a_2+(a_4+a_4)+\ldots+(\underbrace{a_{2^N}+a_{2^N}+\ldots+a_{2^N}}_{2^{N-1}\text{ Summanden}})\Big] \\
&\leq 2\,\Big[a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2^{N-1}+1}+\ldots+a_{2^N-1}+a_{2^N}\Big] \\
&\leq 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \;<\; \infty\,.
\end{aligned}$$

Die monoton wachsende Folge der Partialsummen (alle Summanden sind positiv) ist also beschränkt und daher konvergent.

Sei nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergent. Zu zeigen ist die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Für die Partialsummen dieser Reihe gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} a_k &= a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+\ldots+a_K \\
&\leq a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6+a_7)+\ldots+(a_{2^K}+\ldots+a_{2^{K+1}-1}) \\
&\leq a_1+(a_2+a_2)+(a_4+a_4+a_4+a_4)+\ldots+(a_{2^K}+\ldots+a_{2^K}) \\
&\leq a_1+\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \;<\; \infty\,.
\end{aligned}$$

Die monoton wachsende Folge der Partialsummen ist also beschränkt und daher konvergent. Fertig!

2.4.3 Anwendung des Cauchy-Kriteriums

A Zeigen Sie, daß die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

B Beweisen Sie das Leibniz-Kriterium 2.3.2.e :

Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergent.

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Für die Divergenz ist zu zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \; \exists m > n \geq n_0 \; : \; \left| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon \; .$$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wähle $n := n_0$ und $m := 2n$. Dann gilt:

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} \right| \; = \; \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \; \geq \; (n+1)\frac{1}{2n} \; > \; \frac{1}{2} \; = \; \varepsilon \; .$$

$\boxed{\text{B}}$ Für die Konvergenz ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m > n \geq n_0 \; : \; \left| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k \right| \leq \varepsilon \; .$$

Aus $(a_j - a_{j+1}) \geq 0$ für alle j folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k \right| &= |(-1)^n (a_n - a_{n+1} + a_{n+2} - + \dots)| \\ &= |(a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots| \\ &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots \\ &= a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4}) - \dots \\ &\leq a_n \; = \; |a_n| \; . \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Wegen $a_n \to 0$ gibt es ein n_0, so daß $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.
Nach der obigen Abschätzung folgt $\left| \sum_{k=n}^{m} (-1)^k a_k \right| \leq |a_n| \leq \varepsilon$ für alle $n > n_0$.
Die Fehlerabschätzung des Leibniz-Kriteriums wurde gleich mit bewiesen.

2.4.4 Beweis einiger Kriterien

$\boxed{\text{A}}$ Beweisen Sie folgende allgemeinere Fassung des Grenzwertkriteriums:
Seien a_n, b_n positiv und für $n \to \infty$ sei $0 < \liminf \frac{a_n}{b_n} \leq \limsup \frac{a_n}{b_n} < \infty$,
d.h. es gibt Konstanten $0 < r < R < \infty$ so daß ab einem n_0 gilt $r < \frac{a_n}{b_n} < R$.
Dann sind die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

$\boxed{\text{B}}$ Beweisen Sie das Raabe-Kriterium 2.3.3.h !

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Sei $\alpha := \liminf \dfrac{a_n}{b_n}$. Nach Voraussetzung ist $\alpha > 0$.
Also gilt $\dfrac{a_n}{b_n} > \dfrac{\alpha}{2}$, bzw $a_n > \dfrac{\alpha}{2} b_n$ ab einem n_0 . Nach dem Majoranten-Kriterium folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum a_n$ die der Reihe $\sum b_n$.

Sei $0 < \beta := \limsup \dfrac{a_n}{b_n}$. Nach Voraussetzung ist $\beta < \infty$.
Also gilt $\dfrac{a_n}{b_n} < 2\beta$, bzw $a_n < 2\beta b_n$ für alle n ab einem n_0 . Nach dem Minoranten-Kriterium folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum a_n$ die der Reihe $\sum b_n$.

$\boxed{\text{B}}$ Sei $\beta > 1$ und zunächst $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \dfrac{\beta}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} n\,|a_{n+1}| &\leq n\,|a_n| - \beta\,|a_n| \\ 0 < (\beta-1)\,|a_n| &\leq (n-1)\,|a_n| - n\,|a_{n+1}| \ . \end{aligned}$$

Die Folge $n|a_{n+1}|$ ist daher ab n_0 monoton fallend und auch konvergent, da sie durch 0 nach unten beschränkt ist. Infolgedessen konvergiert auch die Teleskopreihe $\sum b_n$ mit $b_n := \big[(n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|\big]$.
Wegen $0 < (\beta-1)\,|a_n| \leq (n-1)\,|a_n| - n|a_{n+1}|$ folgt die absolute Konvergenz von $\sum a_n$ aus dem Majorantenkriterium.

Sei nun $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$ für alle $n \geq n_0$. Dann haben die Summanden a_n ab n_0 einheitliches Vorzeichen, etwa $a_n > 0$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt für $n \geq n_0$

$$n\,a_{n+1} \geq (n-1)\,a_n > \alpha > 0$$

für eine geeignete positive Konstante α. Also $a_{n+1} \geq \dfrac{\alpha}{n}$ und die Divergenz von $\sum a_n$ folgt aus dem Minorantenkriterium.

2.4.5 g-adische Brüche

Sei g eine fest gewählte natürliche Zahl, $g \geq 2$, und $0 < x < 1$. Die Folgen (x_k) und (r_k) seien rekursiv definiert durch ([.] = Gauss-Klammer) :

$$x_1 := [gx]\,, \quad r_1 := gx - x_1\,, \quad x_{n+1} := [gr_n]\,, \quad r_{n+1} := gr_n - x_{n+1}\ .$$

Zeigen Sie, daß $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k\, g^{-k}$.

Lösung:

Mit Induktion zeigt man zunächst

$$x_n \in \{0,1,2,\ldots,g-1\}\ ,\quad 0 \le r_n < 1 \quad \text{und} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k g^{-k} + r_n g^{-n}\ .$$

Induktionsanfang: $(n = 1)$ Wegen $0 < x < 1$ ist $0 < gx < g$ und daher $x_1 := [gx] =$ (größte ganze Zahl kleiner gleich gx) $\in \{0,1,2,\ldots,g-1\}$. Wegen $r_1 := gx - x_1 = gx - [gx]$ gilt sicherlich $0 \le r_1 < 1$.

Wegen $x = \dfrac{x_1}{g} + \dfrac{r_1}{g}$ gilt auch $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} x_k g^{-k} + r_1 g^{-1}$.

Induktionsschluß: Nach Induktionsvoraussetzung ist $0 \le r_n < 1$, also $x_{n+1} := [gr_n] \in \{0,1,2,\ldots,g-1\}$.
Wie oben ist $0 \le r_{n+1} := gr_n - x_{n+1} = gr_n - [gr_n] < 1$.
Wegen $r_n = \dfrac{x_{n+1}}{g} + \dfrac{r_{n+1}}{g}$ folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n} x_k g^{-k} + r_n g^{-n} &&= \sum_{k=1}^{n} x_k g^{-k} + \left(\frac{x_{n+1}}{g} + \frac{r_{n+1}}{g}\right) g^{-n} \\ & &&= \sum_{k=1}^{n+1} x_k g^{-k} + r_{n+1} g^{-(n+1)}\ . \end{aligned}$$

$(r_n g^{-n})$ ist Produkt einer beschränkten und einer Nullfolge, also $r_n g^{-n} \to 0$ für $n \to \infty$. Damit folgt die Behauptung $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, g^{-k}$.

2.4.6 Zum Satz von Olivier

A Man zeige: Ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt

$$b_n := \frac{1}{n}\left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n\right) \to 0 \quad .$$

B Ist $\sum a_k$ konvergent und (a_k) monoton fallend, so gilt $na_n \to 0$.

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Seien $S := \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $S_0 := 0$.
Dann gilt $S - S_n \to 0$ und nach Aufgabe 2.2.8.A gehen auch die arithmetischen Mittel der Folge $(S - S_n)$ gegen Null. Also:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\big[\,(S-S_0)+(S-S_1)+\ldots+(S-S_{n-1})\,\big] \\
&\quad = \frac{1}{n}\big[\,(a_1+a_2+a_3+\ldots)+(a_2+a_3+\ldots)+\ldots+(a_n+\ldots)\,\big] \\
&\quad = \frac{1}{n}\left[a_1+2a_2+3a_3+\ldots+na_n+n\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right] \\
&\quad = b_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \;\to\; 0\ .
\end{aligned}$$

Da die Reihenreste $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ für $n \to \infty$ gegen 0 gehen, folgt $b_n \to 0$.

$\boxed{\text{B}}$ Ist $\sum a_k$ konvergent und (a_k) monoton fallend, so sind alle $a_k \geq 0$.
Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n}\,(a_1+2a_2+3a_3+\,\ldots\,+na_n) \\
&\geq \frac{1}{n}\,a_n\,(1+2+3+\ldots+n) \;=\; n\,a_n\frac{n+1}{2n} \;\geq\; 0\ .
\end{aligned}$$

Nach Aufgabe 2.4.6.A geht $b_n \to 0$, also $na_n\dfrac{n+1}{2n} \to 0$ nach dem ‘Quetschlemma’. Wegen $\dfrac{n+1}{2n} \to \dfrac{1}{2}$ folgt $na_n \to 0$.
Ein zweiter Beweis ohne Benutzung von 2.4.6.A:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert nach Voraussetzung.
Nach Cauchy gibt es zu ε einen Index n_0, so daß für alle $m > n > n_0$ gilt $0 \leq \sum_{k=n+1}^{m} a_k \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Da die a_k monoton fallen, folgt $(m-n)a_m < \frac{\varepsilon}{2}$.
Wählt man nun $n_1 := 2n_0 + 1$, $m > n_1$ beliebig und $n := \left[\frac{m}{2}\right]$ = (größte ganze Zahl kleiner gleich $\frac{m}{2}$), so gilt $n > n_0$ und daher

$$\frac{m}{2}\,a_m \;\leq\; (m-n)\,a_m \;<\; \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Also ist $ma_m < \varepsilon$ für alle $m > n_1$ und da ε beliebig war, folgt $m\,a_m \to 0$.

2.4.7 Beweise mit Hilfe partieller Summation

A Beweisen Sie das Abelsche Konvergenzkriterium:

Ist (b_k) eine monotone beschränkte Folge reeller Zahlen und ist $\sum a_k$ konvergent, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_k b_k$.

B Beweisen Sie das Dirichlet-Kriterium für Zahlenreihen:

Die Reihe $\sum a_k$ habe beschränkte Partialsummen, die Folge (b_k) sei eine monotone Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe $\sum a_k b_k$.

Lösungen:

A Eine Fassung der partiellen Summation ist (siehe 1.3.5.3):

$$\textbf{(PS)} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \;=\; A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \quad , \text{ wobei } \quad A_k := \sum_{j=1}^{k} a_j \ .$$

Die Folge der Partialsummen A_k konvergiert nach Voraussetzung. Die Reihe $\sum (b_k - b_{k+1})$ ist wegen der Monotonie der Folge (b_k) eine absolut konvergente Teleskopreihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| \;=\; \left| \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) \right| \;=\; |b_1 - b_{n+1}|$.

Also ist die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ nach Aufgabe 2.4.2.A konvergent.

Die Folge $(A_n b_n)$ konvergiert, da sowohl (A_n), als auch (b_n) konvergieren.
Die Behauptung folgt aus **(PS)**.

B Beweis wie oben mit partieller Summation **(PS)**:

Es gilt $A_n b_n \to 0$, da $b_n \to 0$ und (A_n) beschränkt ist.

Die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1})$ ist wie in Aufgabe 2.4.7.A nach Aufgabe 2.4.2.A konvergent.

2.4.8 Einige konkrete Beispiele

1) $\displaystyle\sum \left(\frac{k}{2k+1} \right)^k$ 2) $\displaystyle\sum \frac{n!}{n^n}\, 2^n$ 3) $\displaystyle\sum \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2}\, 2^k}$

4) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k}$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2+n}{n}^{-1/n}$ 6) $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$

Lösungen:

1) Nach dem Wurzelkriterium folgt wegen $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{k}{2k+1} \to \frac{1}{2} < 1$ die Konvergenz.

2) Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium 2.3.3.e, denn

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!\,2^{n+1}\,n^n}{n!\,2^n\,(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{2}{e} < 1 .$$

3) Die Reihe divergiert nach dem Wurzelkriterium 2.3.3.f, denn

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to \frac{e}{2} > 1 .$$

4) Dies ist eine konvergente geometrische Reihe mit der Summe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k} = \frac{2^3}{5 \cdot 3^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2^3}{5 \cdot 3^2} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{8}{15} .$$

5) Die Reihe divergiert nach dem Trivialkriterium 2.3.2.a, denn wegen

$$\binom{2+n}{n}^{-1/n} = \sqrt[n]{\frac{2}{(n+1)(n+2)}} \to 1$$

gehen die Summanden nicht gegen Null.

6) Die Reihe divergiert nach dem Verdichtungskriterium 2.3.3.d. Für die 'verdichtete Reihe' erhält man nämlich

$$\sum 2^n a_{2^n} = \sum 2^n \frac{1}{2^n \ln(2^n)} = \sum \frac{1}{n \ln 2} .$$

Sie ist divergent, da die harmonische Reihe divergiert.

2.4.9 Ein paar theoretische Beispiele

$\boxed{A}$ Sind alle $a_n > 0$, so konvergiert die Reihe $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

$\boxed{B}$ Ist (a_n) monoton wachsend, $a_n > 0$, so konvergiert die Reihe $\sum \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ genau dann, wenn (a_n) beschränkt ist.

$\boxed{C}$ Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n} \text{ konvergent} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} .$$

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Es gilt $0 < \frac{a_n}{1+n^2 a_n} = \frac{1}{n^2} \frac{a_n}{a_n + \frac{1}{n^2}} < \frac{1}{n^2}$.

Da die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt die Behauptung aus dem Majorantenkriterium 2.3.3.a.

$\boxed{\text{B}}$ $\underline{\text{`}\Rightarrow\text{'}}$ Annahme: (a_n) ist unbeschränkt.

Da (a_n) monoton wächst, gilt für $m > n$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) &= \frac{a_{m+1}-a_m}{a_m}+\ldots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}\\ &\geq \frac{1}{a_m}\,\big[\,(a_{m+1}-a_m)+\ldots+(a_{n+1}-a_n)\,\big]\\ &= \frac{1}{a_m}(a_{m+1}-a_n) \;\geq\; 1-\frac{a_n}{a_m}\ .\end{aligned}$$

Da (a_n) unbeschränkt ist, gibt es zu jedem a_n ein $m > n$ mit $a_m > 2a_n$, also mit $1 - \frac{a_n}{a_m} > \frac{1}{2}$. Also gibt es zu jedem n ein $m > n$ mit $\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1\right) > \frac{1}{2}$.

Mit dem Cauchy-Kriterium folgt die Divergenz der Reihe $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$.

$\underline{\text{`}\Leftarrow\text{'}}$ Sei (a_n) monoton wachsend und beschränkt.

Dann ist $\sum(a_{n+1}-a_n)$ eine konvergente Teleskop-Reihe. Wegen

$$0 \;\leq\; \frac{a_{n+1}}{a_n}-1 \;=\; \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \;\leq\; \frac{1}{a_1}(a_{n+1}-a_n)$$

folgt die Konvergenz der Reihe $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ aus dem Majoranten-Kriterium.

$\boxed{\text{C}}$ $\underline{\text{`}\Leftarrow\text{'}}$ Wegen $0 \leq \frac{a_n}{1+na_n} \leq a_n$ folgt diese Richtung aus dem Majorantenkriterium.

$\underline{\text{`}\Rightarrow\text{'}}$ Sei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ konvergent.

Ist ein $a_{n_0} = 0$, so sind von dort an alle $a_n = 0$ und die Behauptung ist trivial. Seien also alle $a_n > 0$.

Wegen $\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{n+1/a_n}$ ist mit a_n auch $\frac{a_n}{1+na_n}$ monoton fallend. Nach dem Satz von Olivier (2.4.6) folgt $b_n := n\frac{a_n}{1+na_n} \to 0$ und wegen $na_n = \frac{b_n}{1-b_n}$ auch $na_n \to 0$. Also gilt $0 < na_n < 1$ ab einem n_0 und daher $\frac{a_n}{1+na_n} \geq \frac{a_n}{2}$.

Nach dem Majorantenkriterium ist die Reihe $\sum \frac{a_n}{2}$ und damit auch die Reihe $\sum a_n$ konvergent.

2.4.10 Klammersetzen in unendlichen Reihen

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine beliebige Reihe, (n_k) eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $n_1 = 1$ und $b_k := (a_{n_k} + a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}-1})$.
Die 'geklammerte' Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sei konvergent und es gelte

$$B_k \;:=\; |a_{n_k}| + \ldots + |a_{n_{k+1}-1}| \;\to\; 0 \;.$$

Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es gilt $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} b_k \;.$

Lösung:

Sei $B := \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist:

$$\exists\, N_0\ \forall\, N > N_0\ :\ \left| B - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| < \varepsilon \;.$$

Zunächst existiert ein $K_0 \in \mathbb{N}$, so daß sowohl $\left| B - \sum_{j=1}^{K} b_j \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $K \geq K_0$ als auch $0 \leq B_k = |a_{n_k}| + \ldots + |a_{n_{k+1}-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq K_0$. Sei $N_0 := n_{K_0+1}$ und $N > N_0$ beliebig. Dann gibt es genau ein $K \geq K_0$ mit $n_{K+1} \leq N < n_{K+2}$. Mit diesem K gilt

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{n_{K+1}-1} a_n + \sum_{n=n_{K+1}}^{N} a_n = \sum_{j=1}^{K} b_j + a_{n_{K+1}} + \ldots + a_N$$

$$\text{und daher} \quad \left| B - \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \;\leq\; \left| B - \sum_{j=1}^{K} b_j \right| + |a_{n_{K+1}}| + \ldots + |a_N| \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2} + B_{K+1} \;<\; \varepsilon \;.$$

2.4.11 Umordnen bedingt konvergenter Reihen

A Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} =: S$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
Ordnen Sie diese Reihe so um, daß auf zwei positive immer ein negativer Summand folgt. Zeigen Sie, daß diese umgeordnete Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + + - \ldots$$

ebenfalls konvergiert und zwar gegen $\frac{3}{2} S$.

B Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.
Ordnen Sie diese Reihe so um, daß auf zwei positive immer ein negativer Summand folgt. Ist diese umgeordnete Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + + - \ldots$$

konvergent?

C Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(na_n) =: \lambda$ existiere. Die Reihe $A := \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium.
Ordnet man diese alternierende Reihe so um, daß auf p positive Summanden (in der alten Reihenfolge) stets q negative folgen, bildet man also die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \ := \ a_0 + a_2 + \ldots + a_{2p-2} - a_1 - a_3 - \ldots - a_{2q-1} + a_{2p} + \ldots \ ,$$

so konvergiert diese umgeordnete Reihe ebenfalls, und zwar gegen

$$B \ := \ A + \frac{\lambda}{2} \ln \frac{p}{q} \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \ .$$

Lösungen:

A Klammersetzen in konvergenten Reihen ändert nichts am Grenzwert. Durch Klammersetzen in der alternierenden harmonischen Reihe erhält man die beiden Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k-2} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} \right) \ ,$$

die beide ebenfalls gegen S konvergieren. Multiplikation der ersten Reihe mit $\frac{1}{2}$ liefert $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right) = \frac{S}{2}$.

Addition zur zweiten Reihe ergibt $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right) = \frac{3}{2}S$.

In dieser Reihe darf man die Klammern weglassen, denn für $k \geq 2$ gilt $\left(\left|\frac{1}{4k-3}\right|+\left|\frac{1}{4k-1}\right|+\left|\frac{1}{2k}\right|\right) \leq \frac{3}{2k} \to 0$.

Also wie behauptet $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\;+\;+\;-\;\ldots\; = \;\frac{3}{2}S$.

(Übrigens kann man mit der Potenzreihenentwicklung von $\ln(1+x)$ um $x_0 = 0$ (4.5.1) und dem Abelschen Grenzwertsatz zeigen, daß $S = \ln 2$. Außerdem folgt es aus Aufgabe 2.4.11.C.)

B Klammert man in der umgeordneten Reihe jeweils zwei positive mit dem folgenden negativen Summanden zusammen, so ergeben sich für diese Klammern

$$\begin{aligned} 0 < b_k \;&:=\; \frac{1}{\sqrt{4k-3}}+\frac{1}{\sqrt{4k-1}}-\frac{1}{\sqrt{2k}} \\ &= \frac{\sqrt{4k-1}\sqrt{2k}+\sqrt{4k-3}\sqrt{2k}-\sqrt{4k-3}\sqrt{4k-1}}{\sqrt{4k-3}\,\sqrt{4k-1}\,\sqrt{2k}} \\ &= \frac{k}{k^{3/2}}\,\frac{\sqrt{8-\frac{2}{k}}+\sqrt{8-\frac{6}{k}}-\sqrt{16-\frac{16}{k}+\frac{3}{k^2}}}{\sqrt{32-\frac{32}{k}+\frac{8}{k^2}}} \end{aligned}$$

Nach den Rechenregeln für Folgen gilt $\frac{b_k}{1/\sqrt{k}} \to \frac{\sqrt{8}+\sqrt{8}-\sqrt{16}}{\sqrt{32}} > 0$.

Da die Reihe $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergiert, divergiert nach dem Grenzwertkriterium (2.3.3.c) auch die Reihe $\sum b_k$.

Dann muß auch die ungeklammerte Reihe divergieren.

C Diese Aufgabe ist etwas schwieriger. Man braucht u.a., daß

$$\left[\frac{1}{kq}+\ldots+\frac{1}{kp-1}\right] \;\to\; L \;:=\; \ln\frac{p}{q} \qquad \text{für } k \to \infty,\; q < p$$

ein Resultat, das erst in Aufgabe 5.2.4.A bewiesen wird.

Sei zunächst $0 < \lambda$ und o.B.d.A. $q < p$, also $L := \ln\frac{p}{q} > 0$.

Betrachte die Partialsumme $B_{k(p+q)}$ der ersten $k(p+q)$ Summanden der neuen Reihe. In dieser Teilsumme sind die ersten $2kq$ Summanden der ursprünglichen Reihe, also die Partialsumme A_{2kq} und noch weitere $k(p-q)$ positive

Summanden enthalten:

$$B_{k(p+q)} = \underbrace{\sum_{n=0}^{2kq-1} (-1)^n a_n}_{=A_{2kq}} + \underbrace{a_{2kq} + \ldots + a_{2(kp-1)}}_{=:A_k^*} \;.$$

Sei nun $0 < \varepsilon < \lambda$ beliebig vorgegeben. Wähle $0 < \delta < \min(\lambda, L)$ so klein, daß $\varepsilon > \delta \,\frac{L+\lambda}{2} - \delta^2 = \delta \left(\frac{L+\lambda}{2} - \delta \right) > 0$. Dann gilt $\lambda - \delta < na_n < \lambda + \delta$ für hinreichend große n. Also existiert ein k_1, so daß für alle $k > k_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda-\delta}{2} \left[\frac{1}{kq} + \ldots + \frac{1}{kp-1} \right] &< \frac{1}{2} \left[\frac{2kqa_{2kq}}{kq} + \ldots + \frac{2(kp-1)a_{2(kp-1)}}{kp-1} \right] = A_k^* \\ &< \frac{\lambda+\delta}{2} \left[\frac{1}{kq} + \ldots + \frac{1}{kp-1} \right] \end{aligned}$$

und $L - \delta < \left[\frac{1}{kq} + \ldots + \frac{1}{kp-1} \right] < L + \delta$. Also gilt für alle $k > k_1$:

$$\frac{\lambda}{2} \ln \frac{p}{q} - \varepsilon < \frac{\lambda-\delta}{2} (L - \delta) = \frac{\lambda}{2} L - \frac{\delta}{2} (L + \lambda - \delta) < A_k^* < \frac{\lambda}{2} \ln \frac{p}{q} + \varepsilon$$

$$\left| \frac{\lambda}{2} \ln \frac{p}{q} - A_k^* \right| < \varepsilon \;.$$

Die A_{2kq} sind Partialsummen der ursprünglichen Reihe. Also gibt es ein $k_2 > k_1$, so daß $|A_{2kq} - A| < \varepsilon$ für alle $k > k_2 > k_1$. Zusammen also

$$|\, B_{k(p+q)} - B \,| = |\, A_{2kq} + A_k^* - A - \frac{\lambda}{2} \ln \frac{p}{q} \,| < 2\varepsilon$$

für alle $k > k_2$. Da $0 < \varepsilon < \lambda$ beliebig war, folgt $B_{k(p+q)} \to B$.

Bis jetzt wurde nur eine Teilfolge der Partialsummenfolge der umgeordneten Reihe betrachtet, d.h. die neue Reihe wurde geklammert. Und zwar wurden jeweils die Summanden

$$a_{2kp} + a_{2kp+2} + \ldots + a_{2(k+1)p-2} - a_{2kq+1} - \ldots - a_{2(k+1)q-1}$$

zusammengefaßt. Die Summe ihrer Absolutbeträge ist kleiner als $p|a_{2kp}| + q|a_{2kq+1}|$, da die a_n eine monoton fallende Nullfoge bilden. Wegen $p|a_{2kp}| + q|a_{2kq+1}| \to 0$ und Aufgabe 2.4.10 ist aber auch die ungeklammerte Reihe konvergent mit demselben Grenzwert B.

Der Fall $\lambda = 0$ wird analog behandelt. Hier muß A_k^* nur nach oben abgeschätzt werden.

2.4.12 Zum Cauchy-Produkt

Untersuchen Sie die folgenden Cauchy-Produkte und ihre Faktoren auf Konvergenz:

A $$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right)$$

B $$\left(0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)^2$$

C $$\left(3+\sum_{k=1}^{\infty}3^k\right)\left(-2+\sum_{k=1}^{\infty}2^k\right).$$

D Beweisen Sie den Satz von Mertens 2.3.7.b über das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen !

Lösungen:

A Die Exponential-Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent. Das Cauchy-Produkt $\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right)$ konvergiert daher ebenfalls für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Für seine Summanden c_n ergibt sich:

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Also gilt *(Funktionalgleichung der Exponentialfunktion!)*:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

B Die Reihe $0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ ist nach dem Leibniz-Kriterium konvergent. Für die Summanden des Cauchy-Produkts dieser Reihe mit sich selbst ergibt sich:

$$\begin{aligned}|c_n| &= \left|0\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^2}{\sqrt{1}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} + \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}\frac{(-1)^2}{\sqrt{1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot 0\right| \\ &= \left|\frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1}}\right|\end{aligned}$$

$$\geq \frac{n-1}{\sqrt{n-1}\sqrt{n-1}} = 1 \, .$$

Nach dem Trivialkriterium ist das Cauchy-Produkt divergent, da die Summanden nicht gegen Null gehen.

(Für absolut konvergente Reihen kann so etwas nicht passieren!)

$\boxed{\text{C}}$ Die Reihe $3 + \sum_{k=1}^{\infty} 3^k$ ist sicherlich divergent und ebenso die Reihe $-2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^k$. (Die Summanden gehen nicht gegen Null.)

Für die Summanden ihres Cauchy-Produkts ergibt sich $c_0 = -6$ und

$$\begin{aligned} c_n &= 3 \cdot 2^n + 3^1 \cdot 2^{n-1} + 3^2 \cdot 2^{n-2} + \ldots + 3^{n-1} \cdot 2^1 + 3^n \cdot (-2) \\ &= 2 \cdot 2^n \; + \; 2^n \left[1 + \tfrac{3}{2} + \; \ldots \; + \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1} \right] \; - \; 2 \cdot 3^n \\ &= 2(2^n - 3^n) \; + \; 2^n \, \frac{(3/2)^n - 1}{3/2 - 1} \; = \; 0 \qquad \text{für } n \geq 1 \, . \end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt dieser beiden divergenten Reihen ist also konvergent.

$\boxed{\text{D}}$ Seien $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$ und $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ die Partialsummen der auftretenden Reihen.
Sei $A := \sum a_k$, $B := \sum b_k$, $\beta_n := B - B_n$ und die Reihe $\sum a_k$ sei absolut konvergent. Zu zeigen ist: $C_n \to AB$. Es gilt:

$$\begin{aligned} C_n &= c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n \\ &= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) \\ &= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \ldots + a_n B_0 \\ &= a_0 (B - \beta_n) + a_1 (B - \beta_{n-1}) + \ldots + a_n (B - \beta_0) \\ &= A_n B - [a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0] \end{aligned}$$

Wegen $A_n B \to AB$ ist nur noch zu zeigen, daß die eckige Klammer rechts gegen 0 strebt. Sei dafür $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Die Reihe $\sum a_k$ konvergiert absolut, sei $K := \sum |a_k|$.
Da $\beta_n \to 0$, existiert ein n_0 derart, daß $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ für $n > n_0$. Da $a_m \to 0$ und (β_k) beschränkt ist, existiert zu ε und n_0 ein n_1 derart, daß $|a_m \beta_k| < \dfrac{\varepsilon}{2(n_0+1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $m > n_1$. Dann folgt für $n > n_0 + n_1$:

$$\begin{aligned} &|a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \ldots + a_n \beta_0| \;\leq \\ &\quad\leq \; |a_0||\beta_n| + \; \ldots \; + |a_{n-n_0-1}||\beta_{n_0+1}| + |a_{n-n_0} \beta_{n_0}| + \; \ldots \; + |a_n \beta_0| \\ &\quad\leq \; \big(|a_0| + \ldots + |a_{n-n_0-1}|\big) \frac{\varepsilon}{2K} + (n_0 + 1) \frac{\varepsilon}{2(n_0+1)} \;\leq\; K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \, . \end{aligned}$$

2.4.13 Doppelreihen

$\boxed{\text{A}}$ Zeigen Sie, daß die Doppelreihe $\displaystyle\sum_{n,m=2}^{\infty} m^{-n}$ konvergiert und berechnen Sie ihre Summe.

$\boxed{\text{B}}$ Für $n, m \in \mathbb{N}$ sei $a_{n,n} := -\dfrac{1}{2n}$, $a_{n,2n} := \dfrac{1}{2n}$ und $a_{n,m} := 0$ für $m \neq n, 2n$.

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right)$.

$\boxed{\text{C}}$ Sei $a_{n,m} := \dfrac{1}{2^m}$ falls $n \leq m$ und $a_{n,m} := 0$ falls $n > m$.

Berechnen Sie $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\right)$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\right)$.

Sind die Ergebnisse gleich ?

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Alle Summanden sind positiv. Die Zeilenreihen sind (absolut) konvergent. Für $m \geq 2$ ist $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^n = \frac{1}{m(m-1)}$ (geom. Reihe) und daher

$$\sum_{m=2}^{\infty}\left(\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^n\right) = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m-1)} = \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = 1 \ .$$

Jede Aufzählung $\displaystyle\sum_{k} a_{\varphi(k),\psi(k)}$ der Doppelreihe $\displaystyle\sum_{n,m=2}^{\infty} m^{-n}$ konvergiert, denn ihre Partialsummenfolge ist monoton wachsend und (z.B. durch 1) beschränkt. Nach dem Doppelreihensatz 2.3.6 konvergiert daher die Doppelreihe und zwar gegen 1.

$\boxed{\text{B}}$ Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = a_{n,n} + a_{n,2n} = 0$, also $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = 0$.

Für ungerades $m \in \mathbb{N}$, $m = 2k+1$, ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = a_{m,m} = -\frac{1}{2(2k+1)}$.

Für $m \in \mathbb{N}$ gerade, $m = 2k$, ist $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = a_{k,2k} + a_{2k,2k} = \frac{1}{2k} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2(2k)}$.

Also ist

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = \frac{1}{2}\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-+\ldots\right) = -\frac{1}{2}\ln 2$$
$$\neq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}\right) = 0 \ .$$

Die Summe der Zeilensummen ist hier ungleich der Summe der Spaltensummen. Die Doppelreihe $\sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m}$ ist divergent.

$\boxed{\text{C}}$ Es ist
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^m} = \frac{m+1}{2^m}$$
und daher
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{2^m} \ .$$
Andererseits ist
$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$
und daher
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = 4 \ .$$

Alle Summanden sind nicht-negativ. Die Reihe der Zeilensummen konvergiert. Nach dem Doppelreihensatz stimmen die Ergebnisse überein, d.h. es ist $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{2^m} = 4$.

Dies Resultat hätte man übrigens auch aus der Potenzreihenentwicklung $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{m=0}^{\infty}(m+1)x^m, \ (|x|<1),$ an der Stelle $x=\frac{1}{2}$ erhalten können oder aus dem Cauchy-Produkt der geometrischen Reihe $\sum 2^{-m}$ mit sich selbst.