10.6 Aufgaben

10.6.1 Ein paar Beweise mit Integralen

A Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f\colon A \to \mathbb{R}$ und $g\colon B \to \mathbb{R}$ stetig. Man beweise

$$\int_{A\times B} f(x)\, g(y)\, d(x,y) \;=\; \left(\int_A f(x)\, dx\right) \left(\int_B g(y)\, dy\right) \;.$$

B Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und Jordan messbar, $\mu(B)$ sein J-Inhalt und $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig und positiv. Dann gilt

$$\left(\int_B f(x)\, dx\right) \cdot \left(\int_B \frac{1}{f(x)}\, dx\right) \;\geq\; \big(\mu(B)\big)^2 \;.$$

C *Mittelwertsatz für Gebietsintegrale:*
Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, nicht-leer und messbar mit endlichem Inhalt $\mu(B)$. Sei $f\colon B \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt.
Dann gibt es ein $\xi \in B$ mit $\displaystyle\int_B f(x)\, dx \;=\; \mu(B)\, f(\xi)$.

D Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f\colon B \to \mathbb{R}$ integrierbar und stetig in einem Punkt $\xi \in B$. Sei (B_j) eine Folge von messbaren Gebieten in B mit positivem Inhalt $\mu(B_j)$, die sich auf ξ zusammenzieht, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein j_0 derart, dass $B_j \subset U_\varepsilon(\xi)$ für alle $j \geq j_0$. Dann gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\mu(B_j)} \int_{B_j} f(x)\, dx \;=\; f(\xi) \;.$$

E *Cauchy-Schwarz-Ungleichung:*
Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $f, g\colon B \to \mathbb{R}$ und f^2 und g^2 auf B integrierbar. Dann ist auch fg auf B integrierbar und es gilt

$$\left[\int_B \big|f(x)g(x)\big|\; dx\right]^2 \;\leq\; \left[\int_B \big|f(x)\big|^2\; dx\right]\; \left[\int_B \big|g(x)\big|^2\; dx\right] \;.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist ein Spezialfall der Hölder-Ungleichung. Siehe dazu auch Aufgabe 5.1.4 und 1.4.6.B .

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ $h(x,y) := f(x)g(y)$ ist im kompakten Bereich $A\times B$ stetig. Fubini darf angewendet werden und liefert:

$$\begin{aligned} J \;&:=\; \int_{A\times B} f(x)\,g(y)\,d(x,y) \;=\; \int_A \left(\int_B f(x)\,g(y)\,dy\right) dx \\ &=\; \int_A f(x)\left(\int_B g(y)\,dy\right) dx \;=\; \left(\int_A f(x)\,dx\right)\left(\int_B g(y)\,dy\right) . \end{aligned}$$

Dabei wurden in den beiden Umformungen nur Konstante bzgl der jeweiligen Integrationsvariablen aus dem Integral herausgezogen. Diese Regel gilt daher unter allgemeineren Voraussetzungen, nämlich immer dann, wenn die betreffenden Integrale existieren und Fubini angewendet werden darf.

$\boxed{\text{B}}$ Dies ist ein Spezialfall der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale (Aufgabe 10.6.1.E) mit $f := \sqrt{f}$ und $g := 1/\sqrt{f}$. Hier folgt ein unabhängiger Beweis.

Integrationsvariable dürfen umbenannt werden. Mit Fubini und 10.6.1.A folgt:

$$\begin{aligned} J \;&:=\; \left(\int_B f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_B \frac{1}{f(x)}\,dx\right) \;=\; \int_{B\times B} \frac{f(x)}{f(y)}\,d(x,y) \\ &=\; \int_{B\times B} \frac{f(y)}{f(x)}\,d(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\int_{B\times B}\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right) d(x,y) \\ &\geq\; \mu(B\times B) \;=\; \big(\mu(B)\big)^2 . \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

$\boxed{\text{C}}$ Sei o.B.d.A. $\mu(B) > 0$. Sonst wäre auch das Integral Null und die behauptete Gleichung gilt für jedes $\xi \in B$.

Sei $m := \inf\limits_{x\in B} f(x)$ und $M := \sup\limits_{x\in B} f(x)$. f ist stetig, B ist zusammenhängend. Also ist auch $f(B) \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein reelles Intervall. Außerdem ist $]m,M[\subset f(B) \subset [m,M]$.

Wegen der Monotonie des Integrals gilt $m\mu(B) \leq \int_B f(x)dx \leq M\mu(B)$. Gelten hier sogar die echten Kleinerzeichen „<“, so gibt es ein $c \in]m,M[$ mit $\int_B f = c\,\mu(B)$. Wegen $]m,M[\subset f(B)$ gibt es ein $\xi \in B$ mit $f(\xi) = c$. Fertig.

Angenommen: $m\mu(B) = \int_B f(x)dx$.
Wenn es ein $\xi \in B$ mit $f(\xi) = m$ gibt, sind wir fertig. Also nehmen wir an, es ist $f(x) > m$ für alle $x \in B$. Dann folgt aus Aufgabe 9.5.3.D, dass auch $\int_B f > m\mu(B)$. Widerspruch.

Der Fall $\int_B f(x)dx = M\mu(B)$ wird analog behandelt.

$\boxed{\text{D}}$ Wegen der Stetigkeit von f in ξ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass $f(\xi) - \varepsilon < f(x) < f(\xi) + \varepsilon$ für alle $x \in B \cap U_\delta(\xi)$. Ab einem Index j_0 liegen alle B_j in $U_\delta(\xi)$. Wegen der Monotonie des Integrals gilt für diese j :

$$(f(\xi) - \varepsilon)\,\mu(B_j) \;\leq\; \int_{B_j} f(x)\,dx \;\leq\; (f(\xi) + \varepsilon)\,\mu(B_j)\ .$$

Die Behauptung folgt für $\varepsilon \to 0$ nach Division durch $\mu(B_j) > 0$.

$\boxed{\text{E}}$ Mit B ist auch $B \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ messbar. Nach Fubini existieren die folgenden Integrale und es gilt (Integrationsvariable dürfen umbenannt werden!) :

$$\begin{aligned}
I \;&:=\; \int_{B\times B} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 \; d(x,y) \\
&=\; \int_B \left(\int_B \left[f^2(x)g^2(y) - 2f(x)g(y)f(y)g(x) + f^2(y)g^2(x)\right] dy \right) dx \\
&=\; \left(\int_B f^2(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_B g^2(y)\,dy \right) \;+\; \left(\int_B f^2(y)\,dy \right) \cdot \left(\int_B g^2(x)\,dx \right) \\
&\qquad\qquad -2 \left(\int_B f(x)g(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_B f(y)g(y)\,dy \right) \\
&=\; 2 \left[\left(\int_B f^2(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_B g^2(x)\,dx \right) \;-\; \left(\int_B f(x)g(x)\,dx \right)^2 \right]\ .
\end{aligned}$$

Der Integrand ist nicht-negativ, also ist das Integral $I \geq 0$. Die Behauptung folgt.

Übrigens ist dieser Beweis ganz analog zu dem der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für endliche Summen in Aufgabe 1.4.6.B .