FORMELSAMMLUNG

Bruchrechnung

$$\frac{a}{b} \underset{\text{Kürzen}}{\overset{\text{Erweitern}}{=}} \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$$

Addition Nenner gleichnamig machen! $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd},\ \text{speziell}\ \frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}}$

bei ganzzahligem Nenner: **Hauptnenner** (= kgV der Nenner), z.B. $\frac{4}{6}+\frac{3}{4}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}=\frac{17}{12}$.

Multiplikation Zähler mit Zähler, Nenner mit Nenner multiplizieren! $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},\ \text{speziell}\ \frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}}$

Division mit Kehrwert multiplizieren! $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc},\ \text{speziell}\ a:\frac{b}{c}=\frac{ac}{b}\ \text{und}\ \frac{a}{b}:c=\frac{a}{bc}}$

Größenvergleich Sind $b, d > 0$, so gilt $\boxed{\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad \geq bc}$ $b, d > 0$ lässt sich durch evtl. Erweitern mit -1 erreichen.

Prozentrechnung

% ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{1}{100}$. $\boxed{p\% = \frac{p}{100}}$

G	Grundwert
$p\%$	Prozentsatz
W	Prozentwert

$$\boxed{W \begin{array}{l} = G \cdot p\% \\ = G \cdot \frac{p}{100} \end{array}}$$

$175\% = 175 \cdot \frac{1}{100} = \frac{175}{100} = 1.75$

$0.19 = \frac{19}{100} = 19 \cdot \frac{1}{100} = 19\%$

$\frac{3}{7} \approx 0.4286 = \frac{42.86}{100} = 42.86\%$

Dreisatz

15 Liter Benzin kosten 18€ .

(a) Wieviel € zahlt man für 52 Liter?
(b) Wieviel Liter erhält man für 40€ ?

(a) Für 1 Liter zahlt man $\frac{18}{15}$€ und für 52 Liter zahlt man $52 \cdot \frac{18}{15}$€ .

(b) Für 1€ erhält man $\frac{15}{18}$ Liter und für 40€ erhält man $40 \cdot \frac{15}{18}$ Liter.

Potenzen

mit ganzen Exponenten

$a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{a^n := \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ \text{Faktoren}} \quad a^0 := 1 \quad a^{-n} := \frac{1}{a^n}}$$

mit rationalen Exponenten

$a \in \mathbb{R}, a > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}}$$

Potenzrechengesetze

$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$ $\boxed{a^n : a^m = a^{n-m}}$ $\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$ $\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n}$

Potenzen und Logarithmen (a Basis, mit $0 < a \neq 1$)

$$y = a^x \iff x = \log_a y$$

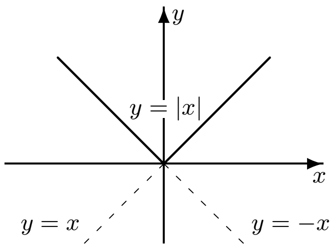
$a^{x+y} = a^x a^y$	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$a^{\log_a x} = x\,,\ x > 0$
$a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$	$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	$\log_a(a^x) = x\,,\ x \in \mathbb{R}$
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$	$\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x = \log_a x^{-1}$	Logarithmen zu verschiedenen Basen
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$	$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$
$(a^x)^r = a^{xr} = (a^r)^x$	$\log_a x^r = r \log_a x$	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Wurzeln ($m, n, q \in \mathbb{N}$ und $a, b > 0$)

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$	$\sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{2}(a+b)$

Betrag

$$\boxed{|x| := \begin{cases} x & ,\ \text{für } x \geq 0 \\ -x & ,\ \text{für } x < 0 \end{cases}}$$



$|x| = |-x| = \sqrt{x^2}$

$|xy| = |x| \cdot |y|$ und $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, für $y \neq 0$.

$\big||x| - |y|\big| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$ **Dreiecksungleichung**

Auf der Zahlengeraden ist

$|x|$ der **Abstand** der Zahl x vom Nullpunkt,
$|x-a|$ der **Abstand** der Zahl x von der Zahl a.

Merke
$\sqrt{x^2} = |x|$

Quadratische Gleichung

$\boldsymbol{p, q}$**–Formel**	$\boldsymbol{a, b, c}$**–Formel**
$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

Vietascher Wurzelsatz:

$x_1 + x_2 = -p$ = **Summe** der Nullstellen
$x_1 \cdot x_2 = q$ = **Produkt** der Nullstellen

n–Fakultät, Binomialkoeffizienten

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

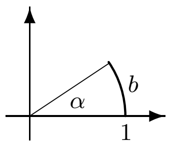
Allgemeine binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n$$

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- ⋆ **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** in Grad und der
- ⋆ **Länge $\boldsymbol{b}$** des zugehörigen Kreisbogens am **Einheitskreis**, bzw. **Verhältnis $\boldsymbol{b}$** der Bogenlänge eines Winkels zu seinem Radius.



$$\boxed{\frac{\alpha}{180^\circ} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} b \qquad b = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$$

lies: $\alpha^\circ = b$ rad

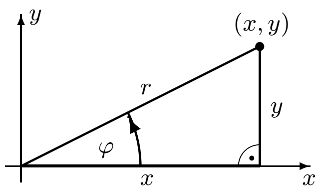
$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ rad} \approx 0.017 \text{ rad}$$
$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.296^\circ$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

Umformung

kartesische Koord.
$\boldsymbol{x, y}$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$



$$(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Polarkoordinaten
$\boldsymbol{r, \varphi}$

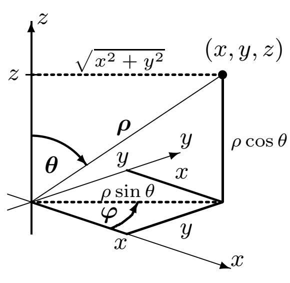
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ Quadranten beachten!

Umformung

kartesische Koord.
$\boldsymbol{x, y, z}$

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\theta$$



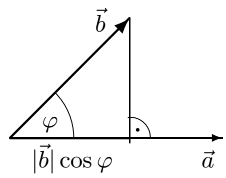
Kugelkoordinaten
$\boldsymbol{\rho, \theta, \varphi}$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

$\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$ Quadranten beachten!

Skalarprodukt



$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \\ |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \end{cases}}$$

Länge von $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

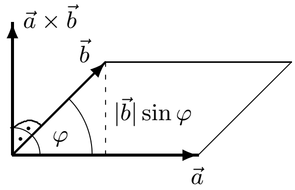
es ist $|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ und $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$

Winkel[1] zwischen $\vec{a},\vec{b}$: $\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Senkrechtstehen[1]: $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

[1] nur sinnvoll für $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$.

Vektorprodukt



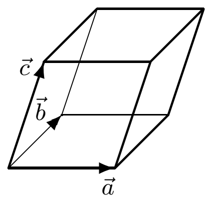
$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}}$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ steht **senkrecht** auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$ = **Flächeninhalt** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein **Rechtssystem**.

Spatprodukt



$$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= \langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = \langle\vec{c},\vec{a},\vec{b}\rangle = \langle\vec{b},\vec{c},\vec{a}\rangle$$

zyklische Vertauschungen ändern das Spatprodukt nicht!

Berechnung mit Regel von **Sarrus** siehe Seite 215.

$\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle \begin{cases} > 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ bilden ein } \textbf{Rechtssystem}. \\ = 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ sind } \textbf{lin. abhängig} \text{ (liegen in einer Ebene).} \\ < 0 \iff \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ bilden ein } \textbf{Linkssystem}. \end{cases}$

$|\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle|$ = **Volumen** des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten **Spats**.

$\frac{1}{6}|\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle|$ = **Volumen** des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten **Tetraeders**.

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ linear abhängig $\iff$ $\boldsymbol{\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle = 0}$ $\iff$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ liegen in einer Ebene.

3.5 Vollständige Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist die wichtigste Eigenschaft der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Es dient dazu, Aussagen über natürliche Zahlen zu beweisen, ist aber auch Grundlage wichtiger Anwendungen. Soll per Computer ein Ausdruck $f(n)$ für natürliche Zahlen n berechnet werden, genügt $f(1)$ und ein Programm, das zu gegebenem $f(k)$ den Ausdruck $f(k+1)$ berechnet. Man sagt dann auch, dass der Ausdruck $f(n)$ **rekursiv** oder **durch Rekursion** oder auch durch **vollständige Induktion** gegeben ist. Der Computer berechnet mittels des gegebenen Programms $f(2)$ aus der gegebenen Größe $f(1)$, dann analog $f(3)$ aus $f(2)$ usw. und zum Schluss $f(n)$ aus $f(n-1)$ und gibt $f(n)$ aus.

Vollständige Induktion

Ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage über die natürliche Zahl n und sind die beiden folgenden Aussagen richtig:

	formal
1) Die Aussage gilt für 1. (Induktionsanfang)	1) $A(1)$
2) Gilt die Aussage für k, so auch für $k+1$. (Induktionsschluss)	2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$

Dann gilt die Aussage $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang nicht 1, sondern $n_0 > 1$ siehe [3.36, 3.50, 3.51].

3.28 *Summe der ersten n natürlichen Zahlen:*
Für jede natürliche Zahl n gilt: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1) Die Aussage gilt für 1 (Induktionsanfang): $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ist offensichtlich richtig.
2) Induktionsschluss:
Gilt die Aussage für k (Induktionsvoraussetzung), so auch für $k+1$ (Induktionsbehauptung):
$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ (Induktionsvoraussetzung)
Zu zeigen ist: $1+2+\ldots+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (Induktionsbehauptung)
Addition von $(k+1)$ auf beiden Seiten der Gleichung der Induktionsvorauss.:
$1+2+\cdots+k+\underline{(k+1)} = \frac{k(k+1)}{2} + \underline{(k+1)} = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
Daher gilt die Aussage für 1 und, falls sie für k gilt, auch für $k+1$.
Die Aussage gilt also für alle natürlichen Zahlen.

3.29 *Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen:*
Für jede natürliche Zahl n gilt: $2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$.

(a) $A(1)$: $2 = 1(1+1)$ richtig.
$A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ (Schluss von k auf $k+1$):
$2+4+6+\cdots+2k = k(k+1)$, Addition von $2(k+1)$:
$2+4+6+\cdots+2k+\underline{2(k+1)} = k(k+1)+\underline{2(k+1)} = (k+1)(k+2)$.
Die Aussage gilt für 1 und, falls sie für k gilt, auch für $k+1$ und ist damit für alle natürlichen Zahlen bewiesen.

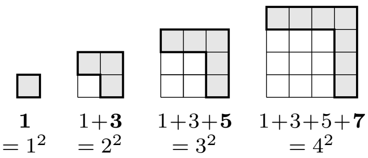
(b) Beweis ohne vollständige Induktion durch Rückgang auf [2.16 (a)]:

$2+4+6+\cdots+2k = 2(1+2+3+\cdots+k) = 2\frac{k(k+1)}{2} = k(k+1).$

3.30 *Summe der ersten n ungeraden Zahlen:*

Für jede natürliche Zahl n gilt:

$1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2.$



$A(1)$: $1 = 1^2$ ist richtig.

$A(k) \Longrightarrow A(k+1)$:

$$1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2, \qquad \text{Addition von } (2k+1):$$
$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+\underline{(2k+1)} = k^2+\underline{(2k+1)} = (k+1)^2.$$

Die Aussage gilt für 1, und ist sie für k richtig, so auch für $k+1$.
Damit gilt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

3.31 *Endliche geometrische Reihe:*

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, *für $q \neq 1$.*

$A(1)$: Zu zeigen ist $1+q = \frac{q^2-1}{q-1}$. Dies folgt aus $q^2-1 = (q-1)(q+1)$.

$A(k) \Longrightarrow A(k+1)$:

$$1+q+q^2+\cdots+q^k = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}, \quad \text{Addition von } q^{k+1}:$$
$$1+q+q^2+\cdots+q^k+\underline{q^{k+1}} = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}+\underline{q^{k+1}} = \frac{q^{k+1}-1+q^{k+1}(q-1)}{q-1}$$
$$= \frac{q^{k+1}-1+q^{k+2}-q^{k+1}}{q-1} = \frac{q^{k+2}-1}{q-1} \text{, fertig!}$$

3.32 *Bernoullische Ungleichung:*

Ist $x \geq -1$, so gilt $(1+x)^n \geq 1+nx$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1) $A(1)$: $1+x \geq 1+x$ ist offensichtlich richtig.
2) $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$: Ist $x \geq -1$ d.h. $(1+x) \geq 0$ und $(1+x)^k \geq 1+kx$,
so folgt durch Multiplikation der Ungleichung $(1+x)^k \geq 1+kx$ mit $(1+x)$:
$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k\underline{(1+x)} \geq (1+kx)\underline{(1+x)} = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$,
da $kx^2 \geq 0$ ist. Also $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$.
Damit ist die Bernoullische Ungleichung bewiesen.

3.33 *Monotonie von x^n für $x \geq 0$:*

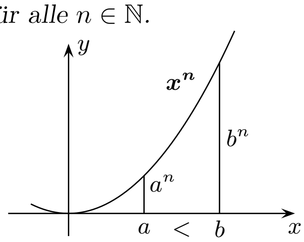
Ist $x \geq 0$, so ist x^n streng monoton wachsend für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen ist: $0 \leq a < b \Longrightarrow a^n < b^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig.

Ist $0 \leq a$ und $a < b$ und $a^k < b^k$, so multipliziert man diese gleichsinnigen Ungleichungen [S. 249] und erhält $a \cdot a^k < b \cdot b^k$, also $a^{k+1} < b^{k+1}$.

Damit ist die Behauptung bewiesen.



Skizzen sind hilfreich, ersetzen aber keinen Beweis!

4.2 Prozentrechnung

% ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{1}{100}$.

4.12 *Man schreibe mit dem Prozentzeichen bzw. als Bruch:*
225%, 0.175, $\frac{1}{8}$, 3.7%, 0.025%, 0.025, $\frac{2}{3}$.

$225\% = 225 \cdot \frac{1}{100} = \frac{225}{100} = \underline{\frac{9}{4}}$, $\quad 0.175 = \frac{17.5}{100} = \underline{17.5\%}$, $\quad \frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{12.5}{100} = \underline{12.5\%}$,

$3.7\% = \frac{3.7}{100} = \underline{\frac{37}{1000}}$, $\quad 0.025\% = \frac{0.025}{100} = \frac{25}{10\,000} = \underline{\frac{1}{400}}$, $\quad 0.025 = \frac{25}{1000} = \frac{2.5}{100} = \underline{2.5\%}$,

$\frac{2}{3} = 0.66666\ldots \approx \frac{66.67}{100} = \underline{66.67\%}$.

Grundformel der Prozentrechnung

Bezeichnungen: G Grundwert, $p\,\%$ Prozentsatz, W Prozentwert

Zusammenhang: $\boxed{\boldsymbol{W = G \cdot p\,\% = G \cdot \frac{p}{100}}}$

4.13 *Sind zwei der drei Größen G, p, W bekannt, kann die dritte berechnet werden. So ergeben sich die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung:*

(a) *Ein Kapital von 5000 € wird jährlich mit 4.5% verzinst. Wieviel Zinsen erhält man nach einem Jahr?*

(b) *Bei einer 4 % igen Verzinsung möchte man nach einem Jahr 1 200 € Zinsen erhalten. Wieviel Geld muss man anlegen?*

(c) *Ein Kapital von 8 000 € bringt in einem Jahr 336 € Zinsen. Zu welchem Zinssatz ist es angelegt?*

(a) Gegeben sind $G = 5\,000$ und $p = 4.5$. Gesucht ist W. Nach der Grundformel erhält man:
$W = G \cdot \frac{p}{100} = 5\,000 \cdot \frac{4.5}{100} = 5 \cdot 45 = 225.$ <u>Man erhält 225 € Zinsen.</u>

(b) Gegeben sind $W = 1\,200$ und $p = 4$. Gesucht ist G. Auflösen der Grundformel nach G ergibt:
$W = G \cdot p\% \Longrightarrow G = \frac{100W}{p} = \frac{100 \cdot 1\,200}{4} = 30\,000.$ <u>Man muss 30 000 € anlegen.</u>

(c) Gegeben sind $G = 8\,000$ und $W = 336$. Gesucht ist p. Auflösen der Grundformel nach p ergibt:
$W = G \cdot p\% \Longrightarrow p = \frac{100W}{G} = \frac{33\,600}{8\,000} = 4.2.$ <u>Der Zinssatz beträgt 4.2 %.</u>

4.14 *Ein landwirtschaftlicher Großbetrieb mit 600 ha Fläche baut auf 30 % der Fläche Weizen an, auf 55 % der Fläche Raps, und der Rest ist Weideland. Wie groß sind die jeweiligen Anbauflächen?*

$600 \cdot \frac{30}{100} = 180, \qquad 600 \cdot \frac{55}{100} = 330, \qquad \text{Rest} = 600 - 330 - 180 = 90.$
Auf 180 ha wird Weizen angebaut, auf 330 ha Raps. Die restlichen 90 ha sind Weideland und das sind $\frac{90}{600} = \frac{15}{100} = 15\%$. Probe: $30\% + 55\% + 15\% = 100\%$.

4.15 *Eine Ware verteuert sich von 200€ auf 250€ .*
(a) *Um wieviel % ist sie teurer geworden?* (b) *Wieviel % war sie billiger?*

(a) Gefragt ist: Wieviel % von 200€ sind 50€ ?
Also $G = 200$ und $W = 50$; gesucht $p\,\%$.
$p\% = \frac{p}{100} = \frac{W}{G} = \frac{50}{200} = \frac{25}{100} = \underline{25\%}$ ist die Ware teurer geworden.

(b) Gefragt ist jetzt: Wieviel % von 250€ sind 50€ ?
Also $G = 250$, $W = 50$; gesucht $p\,\% = \frac{p}{100} = \frac{W}{G} = \frac{50}{250} = \frac{20}{100} = \underline{20\%}$.
20% war die Ware vorher billiger.

Zusammenfassend: 50 sind 25% von 200 (Preis vorher),
20% von 250 (Preis nachher).

Man beachte:
Wird eine Ware um $p\,\%$ teurer, so war sie vorher um $\boxed{\frac{100p}{100+p}\,\%}$ billiger.

Im obigen Beispiel gilt: Verteuerung um 25 % bedeutet, dass vorher die Ware um $\frac{2500}{100+25}\% = 20\,\%$ billiger war.

Zu beachten ist also, auf welchen Grundwert sich der Prozentwert W bezieht:
Ist z.B. A 200 cm groß und B nur 160 cm, so ist
A 25% größer als B (40 sind 25% vom Grundwert 160), aber
B 20% kleiner als A (40 sind 20% vom Grundwert 200).

4.16 *Wieviel Prozent spart ein Autofahrer bei fester Wegstrecke an Zeit, wenn er sein Durchschnittstempo von 100 km/h auf 125 km/h, also um 25%, erhöht?*

Es gilt: Weg = Geschwindigkeit mal Zeit, allgemein geschrieben als $s = vt$.

Wird also v bei gleichem Weg um 25 % gesteigert, d.h. durch $1.25v$ ersetzt, so muss die Zeit $1t$ durch $\frac{1}{1.25}t = 0.8t$ ersetzt werden ($s = vt = 1.25v \cdot \frac{1}{1.25}t$).

Die Zeitersparnis beträgt $1 - 0.8 = 0.2 = \underline{20\,\%}$.

Mit obiger Formel erhält man: Zeitersparnis $= \frac{100 \cdot 25}{100+25}\% = \frac{2500}{125}\% = \underline{20\%}$.

4.17 *Ein Kapital von 5 000€ wird für 4 Jahre zu einem jährlichen Zinssatz von 4.5% angelegt, wobei die Zinsen jeweils am Ende eines Jahres dem Kapital zugeschlagen werden. Welchen Betrag erhält man nach Ablauf der 4 Jahre?*

Wir lösen die Aufgabe allgemein für: Kapital K_0, Zinssatz $p\%$, n Jahre.

K_0 wächst bei $p\%$ in einem Jahr auf: $K_1 = K_0 + K_0 \cdot p\% = K_0(1 + \frac{p}{100})$
K_0 wächst bei $p\%$ in zwei Jahren auf: $K_2 = K_1(1 + \frac{p}{100}) = K_0(1 + \frac{p}{100})^2$
und weiter:
K_0 wächst bei $p\%$ in n Jahren auf:

Zinseszinsformel
$\boldsymbol{K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})^n}$

Hier: $K_4 = 5\,000 \cdot (1 + \frac{4.5}{100})^4 \approx 5\,963$ (siehe Potenzrechnung [5.2]).

Nach 4 Jahren ist das Kapital auf $\underline{5\,963€}$ angewachsen (s. [Kap. 15]).

4.3 Dreisatz

Eine typische Fragestellung aus dem täglichen Leben ist z.B.

30 Liter Benzin kosten 42 Euro. Wie teuer sind 50 Liter Benzin?

Als Lösungsmethode kann man den sogenannten **Dreisatz** benutzen:

Bekannt ist:	30 Liter Benzin kosten 42 Euro.
Es folgt:	1 Liter Benzin kostet $\frac{42}{30}$ Euro.
Also:	50 Liter Benzin kosten $50 \cdot \frac{42}{30}$ Euro.
	$50 \cdot \frac{42}{30} = 5 \cdot 14 = 70$, also kosten 50 Liter Benzin 70 Euro.

Prinzip des Dreisatzes

Aus bekannten gegebenen Daten (1. Satz) wird zunächst auf eine Einheit geschlossen (2. Satz) und damit dann auf die gesuchte Größe (3. Satz).

4.18 *Ein Fahrzeug fährt mit* 30 *Liter Benzin* 350 *km weit.*
Wieviel Liter braucht es für 600 *km?*

1. Bekannt: 30 Liter für 350 km.
2. Folgerung: $\frac{30}{350}$ Liter für 1 km.
3. Schluss: $\frac{30}{350} \cdot 600$ Liter für 600 km.

$\frac{30}{350} \cdot 600 = \frac{6 \cdot 60}{7} \approx 51.4$, der Verbrauch für 600 km beträgt ca. <u>51.4 Liter Benzin</u>.

4.19 *Ein mit konstanter Geschwindigkeit fahrendes Fahrzeug legt* 300 *km in* 3 *Stunden* 20 *Minuten zurück.*
Wie weit kommt es in 5 *Stunden?*

1. Bekannt: 300 km in 3 Std. 20 Min $= \frac{10}{3}$ Stunden.
2. Folgerung: $300 : \frac{10}{3} = 90$ km in 1 Stunde.
3. Schluss: $5 \cdot 90 =$ <u>450 km</u> in 5 Stunden.

4.20 *Ein mit konstanter Geschwindigkeit von* 90 *km/h fahrendes Kfz legt eine gewisse Strecke in* 3 *Stunden* 20 *Minuten zurück.*
Wie schnell muss es fahren, um in 3 *Stunden am Ziel zu sein?*

Hier geht es ohne Dreisatz einfacher:

Bei Tempo 90 km/h fährt das Kfz in 3 Stunden 20 Minuten genau 300 km.
Um diese Strecke in 3 Stunden zurückzulegen, muss es <u>Tempo 100 km/h</u> fahren.

4.21 *3 Maler streichen eine gewisse Fläche in 15 Stunden.*
Wie lange benötigen 5 Maler für diese Fläche?

1. Bekannt: 3 Maler benötigen 15 Stunden.
2. Folgerung: 1 Maler benötigt $15 \cdot 3$ Stunden.
3. Schluss: 5 Maler benötigen $\frac{15 \cdot 3}{5} =$ <u>9 Stunden</u>.

5.4 Logarithmen

Für Potenzen gilt:

Für $0 < a \neq 1$ und $c > 0$ hat die Gleichung $a^x = c$ genau eine Lösung.

Definition des Logarithmus

Für $0 < a \neq 1$ und $c > 0$ ist die Zahl $\boldsymbol{\log_a c}$
(lies: Logarithmus von c zur Basis a) definiert durch $a^{\log_a c} = c$.

Der Logarithmus von c zur Basis a ist also derjenige Exponent, mit dem man a potenzieren muß, um c zu erhalten.

$\boxed{\log_a c = b \iff a^b = c}$ z.B. $\log_{10} 100 = 2$, da $10^2 = 100$.

5.21 *Berechne die folgenden Logarithmen durch Rückgang auf Potenzrechnung.*

(a) $\log_2 8$, (b) $\log_5 25$, (c) $\log_3 \frac{1}{3}$,
(d) $\log_5 \sqrt{5}$, (e) $\log_{\frac{1}{2}} 1024$, (f) $\log_7 1$.

(a) $\log_2 8 = 3, \quad \text{da } 2^3 = 8.$ (b) $\log_5 25 = 2, \quad \text{da } 5^2 = 25.$
(c) $\log_3 \frac{1}{3} = -1, \quad \text{da } 3^{-1} = \frac{1}{3}.$ (d) $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}, \quad \text{da } 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}.$
(e) $\log_{\frac{1}{2}} 1024 = -10, \quad \text{da } (\frac{1}{2})^{-10} = 1024.$ (f) $\log_7 1 = 0, \quad \text{da } 7^0 = 1.$

5.22 *Man berechne jeweils x:*

$\log_{\frac{1}{3}} 81 = x, \qquad \log_2 x = -3, \qquad \log_x 9 = 2.$

$\log_{\frac{1}{3}} 81 = x$	$\iff$	$(\frac{1}{3})^x = 81$	$\iff$	$x = -4$	Logarithmieren
$\log_2 x = -3$	$\iff$	$2^{-3} = x$	$\iff$	$x = \frac{1}{8}$	Potenzieren
$\log_x 9 = 2$	$\iff$	$x^2 = 9$	$\iff$	$x = \sqrt{9} = 3$	Radizieren

5.23 *Man berechne die folgenden Logarithmen:*

(a) $\log_{\frac{1}{2}} 8$, (b) $\log_2 \sqrt[3]{16}$, (c) $\log_2 4^{\frac{7}{10}}$,
(d) $\log_{10} \frac{1}{10^5}$, (e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[7]{1024}$, (f) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{8}{27}}$.

(a) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x \iff (\frac{1}{2})^x = 8 \iff 2^{-x} = 2^3 \iff \underline{x = -3}.$

(b) $\log_2 \sqrt[3]{16} = x \iff 2^x = \sqrt[3]{16} \iff 2^x = 2^{\frac{4}{3}} \iff \underline{x = \frac{4}{3}}.$

(c) $\log_2 4^{\frac{7}{10}} = x \iff 2^x = 4^{\frac{7}{10}} \iff 2^x = (2^2)^{\frac{7}{10}} \iff \underline{x = \frac{7}{5}}.$

(d) $\log_{10} \frac{1}{10^5} = x \iff 10^x = \frac{1}{10^5} \iff \underline{x = -5}.$

(e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[7]{1024} = x \iff (\frac{1}{2})^x = \sqrt[7]{1024} \iff 2^{-x} = 2^{\frac{10}{7}} \iff \underline{x = -\frac{10}{7}}.$

(f) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{8}{27}} = x \iff (\frac{2}{3})^x = \sqrt{\frac{8}{27}} \iff (\frac{2}{3})^x = (\frac{2^3}{3^3})^{\frac{1}{2}} \iff (\frac{2}{3})^x = (\frac{2}{3})^{\frac{3}{2}}$
$\iff \underline{x = \frac{3}{2}}.$

Für spezielle Basen sind spezielle Schreibweisen für Logarithmen üblich:

Spezielle Logarithmen

$\lg c \; := \; \log_{10} c$ heißt dekadischer Logarithmus.
$\mathbf{ln}\, \boldsymbol{c} \; := \; \log_{\mathrm{e}} c$ heißt **natürlicher Logarithmus**.
wobei $\mathrm{e} = 2.718281\ldots$ die Eulersche Zahl ist (siehe [Seite 77]).

Für das Rechnen mit Logarithmen (Exponenten) gelten die folgenden Gesetze:

Logarithmengesetze $\quad$ **($\boldsymbol{a}$ Basis, mit $\boldsymbol{0 < a \neq 1}$)**

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \text{speziell} \qquad \log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$$
$$\log_a x^r = r \log_a x$$

Logarithmen zu verschiedenen Basen:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad \text{speziell} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Wichtige Regeln:

$$a^{\log_a x} = x\,, \quad x > 0 \qquad \text{speziell} \qquad \mathrm{e}^{\mathbf{ln}\, \boldsymbol{x}} \boldsymbol{= x} \quad \text{für } \boldsymbol{x > 0}$$
$$\log_a(a^x) = x\,, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \text{speziell} \qquad \mathbf{ln}\, \mathrm{e}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{= x\,,} \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$$

5.24 *Man berechne* $\lg 1000$, $\lg 0.01$, $\lg \sqrt[3]{10000}$, $\lg \frac{1}{10}$.

$\lg 1000 = \lg 10^3 = \underline{3}$, $\qquad \lg 0.01 = \lg 10^{-2} = \underline{-2}$,

$\lg \sqrt[3]{10000} = \lg 10^{\frac{4}{3}} = \underline{\frac{4}{3}}$, $\qquad \lg \frac{1}{10} = -\lg 10 = \underline{-1}$.

5.25 *Gegeben sind* $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln 3 \approx 1.10$, $\ln 5 \approx 1.61$.
Man berechne hiermit jeweils die folgenden Logarithmen:

(1) $\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \approx \underline{1.79}$ $\qquad \ln ab = \ln a + \ln b$

(2) $\ln 75 = \ln(3 \cdot 25) = \ln 3 + 2 \ln 5 \approx \underline{4.32}$

(3) $\ln 81 = \ln 3^4 = 4 \ln 3 \approx \underline{4.40}$ $\qquad \ln a^b = b \ln a$

(4) $\ln 1000 = \ln 10^3 = 3 \ln 10 = 3(\ln 2 + \ln 5) \approx \underline{6.90}$

(5) $\ln \frac{2}{3} = \ln 2 - \ln 3 \approx \underline{-0.41}$ $\qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(6) $\ln \frac{1}{1000} = -\ln 1000 \approx \underline{-6.90}$

(7) $\ln \frac{4}{9} = \ln(\frac{2}{3})^2 = 2 \ln \frac{2}{3} \approx \underline{-0.82}$

(8) $\ln \sqrt{5} = \frac{1}{2} \ln 5 \approx \underline{0.81}$

(9) $\ln \sqrt[3]{15} = \frac{1}{3}(\ln 3 + \ln 5) \approx \underline{0.90}$

(10) $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \approx \underline{-0.69}$

5.26 *Man berechne mit den Logarithmengesetzen und dem Taschenrechner:*

(a) $\log_5 7$, (b) $\log_2 30$, (c) $\log_7 0.01$,
(d) $\log_8 \frac{3}{7}$, (e) $\log_{0.5} \frac{1}{3}$, (f) $\log_{10} \mathrm{e}$.

Auf Taschenrechnern findet man üblicherweise die Tasten ln für den natürlichen Logarithmus und die Taste log für den Logarithmus zur Basis 10. Man beachte dabei die Beschreibung des Taschenrechners.

Wir benutzen hier nur den ln und das spezielle Gesetz $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$.

(a) $\log_5 7 = \frac{\ln 7}{\ln 5} \approx \underline{1.21}$, (b) $\log_2 30 = \frac{\ln 30}{\ln 2} \approx \underline{4.91}$,

(c) $\log_7 0.01 = \frac{\ln 0.01}{\ln 7} \approx \underline{-2.37}$, (d) $\log_8 \frac{3}{7} = \frac{\ln 3 - \ln 7}{\ln 8} \approx \underline{-0.41}$,

(e) $\log_{0.5} \frac{1}{3} = -\log_{0.5} 3 = -\frac{\ln 3}{\ln 0.5} \approx \underline{1.58}$,

(f) $\log_{10} \mathrm{e} = \lg \mathrm{e} = \frac{\ln \mathrm{e}}{\ln 10} = \frac{1}{\ln 10} \approx \underline{0.43}$.

5.27 *Man vereinfache jeweils mit den Logarithmengesetzen:*

(1) $\log_2 8 + \log_2 4 - \log_2 16 \;= \log_2 \frac{8 \cdot 4}{16} = \log_2 2 = \underline{1}$.

(2) $\log_7 14 - \log_7 4 + \log_7 6 \;= \log_7 \frac{14 \cdot 6}{4} = \log_7 (3 \cdot 7) = \log_7 3 \;+ 1 \approx \underline{1.56}$.

(3) $\ln(3\mathrm{e})^2 - \ln 9 \;= \ln \frac{3^2\,\mathrm{e}^2}{9} = \ln \mathrm{e}^2 = \underline{2}$.

(4) $\ln \sqrt[3]{5} + \ln \sqrt{2} - \ln \sqrt{10} \;= \frac{1}{3} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(2 \cdot 5) =$
$\frac{1}{3} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 = -\frac{1}{6} \ln 5 \approx \underline{-0.27}$.

(5) $\lg \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c^4}} - 4 \lg \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[5]{c}} \;= \lg \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[5]{c^4}} - \lg (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[5]{c}})^4 =$

$$= \lg \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{5}}} - \lg \frac{a^2}{b^{\frac{4}{3}} \cdot c^{\frac{4}{5}}} = \lg (\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{4}{5}}} \cdot \frac{b^{\frac{4}{3}} \cdot c^{\frac{4}{5}}}{a^2}) = \lg \frac{b^2}{a^{\frac{3}{2}}} = \underline{2 \lg b - \tfrac{3}{2} \lg a}.$$

5.28 *Wieviele Stellen hat die Zahl 2^{64}?*

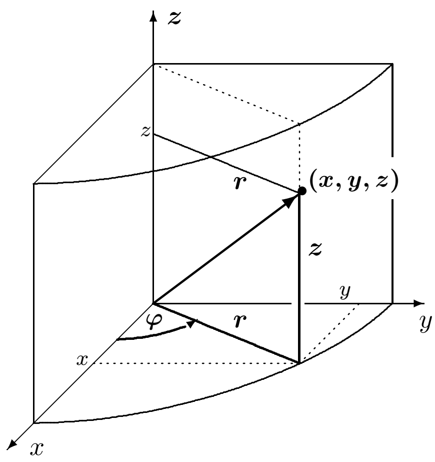
Schreibt man eine natürliche Zahl, z.B. 5 763, als Produkt einer Zahl zwischen 0 und 1 und einer Zehnerpotenz, also $5\,763 = 0.5763 \cdot 10^4$, so gibt der Exponent der Zehnerpotenz die Anzahl der Stellen der Zahl an. Daher machen wir für die gesuchte Stellenanzahl x den Ansatz $2^{64} = 10^x$. Auf beiden Seiten gehen wir zum natürlichen Logarithmus über.
$2^{64} = 10^x \iff \ln 2^{64} = \ln 10^x \iff 64 \ln 2 = x \ln 10$ (Logarithmengesetz)
$\iff x = \frac{64 \ln 2}{\ln 10} \approx 19.3$.
Damit ist $2^{64} \approx 10^{19.3} = 10^{-0.7} \cdot 10^{20}$ $(0 < 10^{-0.7} < 1)$.
Die Zahl 2^{64} hat also 20 Stellen.

Die genaue Zahl ist $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$.

Zylinderkoordinaten r, φ, z

Jeder Punkt $P = (x, y, z)$ des Raumes lässt sich eindeutig durch die Angabe seiner Zylinderkoordinaten $\boldsymbol{r, \varphi, z}$ beschreiben.

Zylinderkoordinaten r, φ, z sind im Wesentlichen ebene Polarkoordinaten r und φ, die um eine dritte Koordinate z ergänzt werden. z gibt die Höhe eines Punktes $P = (x, y, z)$ senkrecht über (oder unter) der Ebene des Polarkoordinatensystems an. Die Koordinate r gibt den Abstand eines Punktes P von der z-Achse (und nicht den Abstand vom Koordinatenursprung) an.

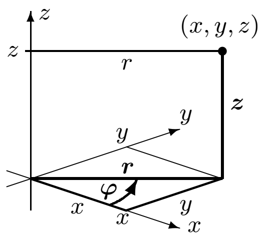


Umformung

Zylinderkoord. in kartesische Koord.

$\boldsymbol{x, y, z}$

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$



Kart. Koordinaten in Zylinderkoordinaten

$\boldsymbol{r, \varphi, z}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{Quadranten beachten!}$$
$x = 0$ siehe [7.2 (c)]
$$z = z$$

7.4 *Die Zylinderkoordinaten von P sind $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und $z = 3$.*
Man berechne die kartesischen Koordinaten von P.

$x = r\cos\varphi = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}}$,
$y = r\sin\varphi = 2\sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{1}$, , also $P = \underline{(\sqrt{3}, 1, 3)}$.
$z = z = \underline{3}$.

7.5 *Berechne die Zylinderkoordinaten von $P = (1, -2, 2)$ und $Q = (0, 2, -2)$.*

Zu P: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \underline{\sqrt{5}}$ $\tan\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-2}{1} = -2$.
$(1, -2)$ liegt im 4. Quadr., also ist $\varphi \approx \underline{-63.43°}$, bzw. $\varphi \approx \underline{296.57°}$. $z = \underline{2}$.

Zu Q: $r = \underline{2}$ und $\varphi = \underline{\frac{\pi}{2}}$ ((0, 2, 0) liegt auf der pos. y-Achse), $z = \underline{-2}$.

8 Geometrie

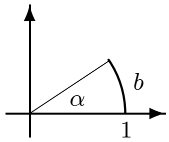
8.1 Winkel

Winkel werden in Grad (z.B. $\alpha = 30°$) oder im Bogenmaß gemessen.
Das **Bogenmaß** eines Winkels ist das Verhältnis des Kreisbogens dieses Winkels zum Radius des Kreises oder die Länge des zugehörigen Bogens am Einheitskreis.
Das Bogenmaß b wird häufig mit Radiant (rad) bezeichnet; b ist eine reelle Zahl.

Umrechnung: Gradmaß – Bogenmaß

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen dem

- **Winkel $\boldsymbol{\alpha}$** in Grad und dem
- **Bogenmaß $\boldsymbol{b}$**.



$$\boxed{\frac{\alpha}{180°} = \frac{b}{\pi}}$$

$$\alpha = \frac{b}{\pi}180°\,, \quad b = 1 \implies \alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57.296°$$

$$b = \frac{\alpha}{180°}\pi\,, \quad \alpha = 1° \implies b = \frac{1°}{180°}\pi \approx 0.017$$

Benutzt man einen Taschenrechner, vergewissere man sich, ob er auf Winkel im Gradmaß (DEG) oder im Bogenmaß (RAD) eingestellt ist.

8.1 (a) *Für den Winkel α mit Bogenmaß $b = 2.5$ bestimme man das Gradmaß.*
(b) *Für die Winkel $\alpha = 30°$ bzw. $\alpha = 360°$ bestimme man das Bogenmaß.*

(a) $b = 2.5 \implies \alpha = \frac{180°}{\pi}b \approx \underline{143.24°}$

(b) $\alpha = 30° \implies b = \frac{\alpha}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} \approx \underline{0.52}$

$\alpha = 360° \implies b = 2\pi \approx \underline{6.283}$

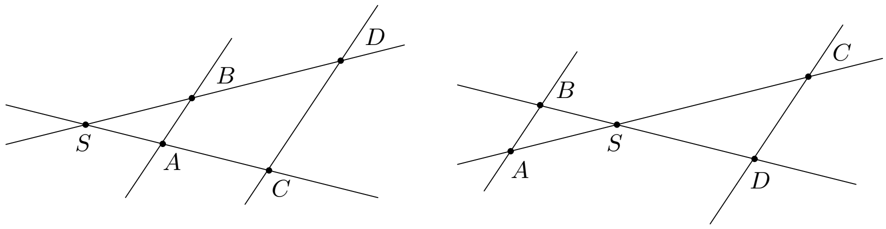
Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π.

Wichtige Zuordnungen zwischen Gradmaß und Bogenmaß:

Winkel in Grad	360°	270°	180°	90°	60°	45°	30°	1°	57.296°
Winkel im Bogenmaß	2π	$\frac{3}{2}\pi$	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0.017	1

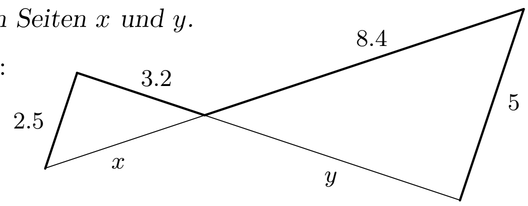
8.3 Strahlensatz

Strahlensatz



$$\boldsymbol{\overline{SA} : \overline{SC} \quad = \quad \overline{SB} : \overline{SD} \quad = \quad \overline{AB} : \overline{CD}}$$

8.9 *Man berechne die fehlenden Seiten x und y.*

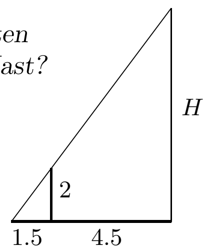


Mit dem Strahlensatz erhält man:

$\dfrac{5}{2.5} = \dfrac{8.4}{x} \quad\Longrightarrow\quad \underline{x = 4.2}$,

$\dfrac{5}{2.5} = \dfrac{y}{3.2} \quad\Longrightarrow\quad \underline{y = 6.4}$.

8.10 *Ein senkrecht stehender Stab von 2 m Länge wirft einen 1.5 m langen Schatten. Der Schatten eines Mastes ist 4.5 m länger. Wie hoch ist Mast?*

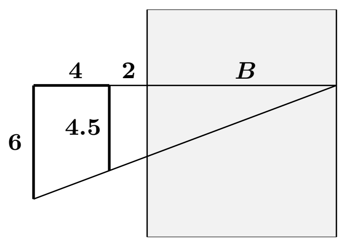


Für die Höhe H des Mastes in Metern gilt:

$\dfrac{H}{2} = \dfrac{1.5+4.5}{1.5} = \dfrac{6}{1.5} \quad\Longrightarrow\quad \underline{H = 8}$.

Der Mast ist $\underline{8\,\text{m}}$ hoch.

8.11 *Bestimme die Breite B des Flusses nach den Angaben der Skizze. Die Längen sind in Metern angegeben.*



Für die Breite B gilt:

$$\frac{B+2}{4.5} = \frac{B+2+4}{6}$$

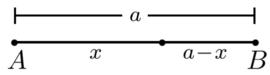
$\Longleftrightarrow\quad 6B + 6 \cdot 2 = 4.5B + 4.5 \cdot 6$

$\Longleftrightarrow\quad 1.5B = 15 \quad\Longleftrightarrow\quad \underline{B = 10}$

Der Fluss ist $\underline{10\,\text{m}}$ breit.

Goldener Schnitt

Eine Strecke $\overline{AB}$ ist im **goldenen Schnitt** geteilt, wenn sich die ganze Strecke zum größeren Abschnitt wie dieser zum kleineren Abschnitt verhält:



$$\frac{\text{ganze Strecke}}{\text{größerer Abschnitt}} = \frac{\text{größerer Abschnitt}}{\text{kleinerer Abschnitt}}$$

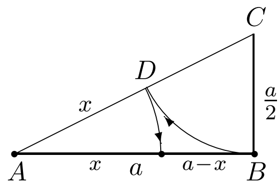
Teilungsverhältnis $\approx$ **61,8 % = 0.618**

goldener Schnitt: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a \approx \mathbf{0.618}\,a$

Konstruktionsmöglichkeit für den goldenen Schnitt

Trage an $\overline{AB}$ in B senkrecht die halbe Strecke $\overline{AB}$ an. Der Endpunkt sei C. Schlage um C einen Kreis mit $r = \frac{a}{2}$, der die Strecke $\overline{AC}$ in D trifft. Schlage dann um A einen Kreis durch D. Der Schnittpunkt dieses Kreises mit $\overline{AB}$ teilt $\overline{AB}$ im Verhältnis des goldenen Schnitts.



8.14 *Man zeige, dass die angegebene Konstruktion die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis des goldenen Schnitts teilt.*

Es ist $\overline{AC}^2 = a^2 + (\frac{a}{2})^2$ (Pythagoras)

$\Longrightarrow \overline{AC} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\;a\,.$

Also gilt $x = \overline{AD} = \frac{1}{2}\sqrt{5}\;a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$

8.15 *Ein Rechteck habe die Breite x und die Höhe 1. Man bestimme x so, dass*

(a) *das Rechteck nach dem goldenen Schnitt aufgebaut ist.*

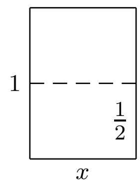
(b) *das Verhältnis Breite zu Höhe dem einer DIN A4 Seite entspricht. Faltet man eine DIN A4 Seite in der Mitte des größeren Randes, so bleibt das Verhältnis von kleinerer zu größerer Seite erhalten.*

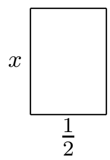
(a) Nach dem goldenen Schnitt gilt $\underline{x = 0.62}$.

(b) Faltet man eine DIN A4 Seite, erhält man eine DIN A5 Seite.

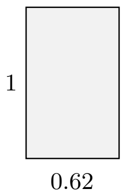
Das Verhältnis bleibt erhalten, also

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \iff x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \underline{x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.71.}$$

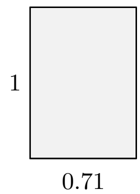




goldener Schnitt

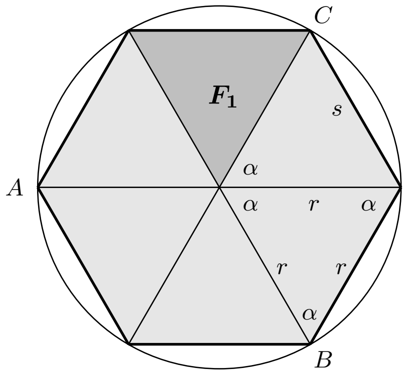


DIN A4 Format



DIN 4=210 mm x 297 mm
(Deutsches Briefformat)

8.11 Regelmäßiges Sechseck



$$\begin{aligned} \alpha &= 60^\circ \\ s &= r \\ F_1 &= \frac{1}{4}\sqrt{3}\, r^2 \\ F &= 6F_1 = \frac{3}{2}\sqrt{3}\, r^2 \end{aligned}$$

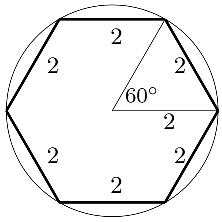
8.35 *Gegeben sei ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge $s = 2$.*

(a) *Man zeige: Das Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Teildreiecken.*
(b) *Man berechne den Flächeninhalt F_1 eines Teildreiecks.*
(c) *Man berechne den Flächeninhalt F des Sechsecks.*
(d) *Man konstruiere ein regelmäßiges Sechseck der Seitenlänge $s = 2$.*
(e) *Verbindet man drei nichtbenachbarte Ecken A, B, C des Sechsecks miteinander, entsteht ein gleichseitiges Dreieck (regelmäßiges Dreieck). Man berechne seinen Flächeninhalt F_2 und seine Seitenlänge a.*

(a) Alle sechs Teildreiecke sind gleichschenklig und es ist $\alpha = \frac{1}{6}360^\circ = 60^\circ$. Folglich sind alle Winkel im Teildreieck 60° und das Teildreieck ist gleichseitig [8.19].

(b) Der Flächeninhalt F_1 eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $s = 2$ ist $F_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\, s^2 \implies \underline{F_1 = \sqrt{3}}$.

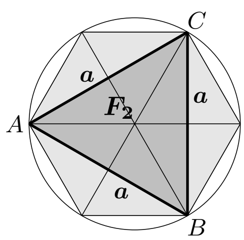
(c) Das Sechseck besteht aus sechs Teildreiecken, der Flächeninhalt F des Sechsecks ist also $F = 6F_1$.
$F = 6F_1 \implies \underline{F = 6\sqrt{3}}$.



(d) Trägt man von einem Punkt eines Kreises vom Radius $r = 2$ sechs Sehnen der Länge $s = r = 2$ ab, so erhält man die Eckpunkte eines regelmäßigen Sechsecks der Seitenlänge $s = 2$.

(e) Aus Symmetriegründen gilt für den Flächeninhalt F_2 des Dreiecks A, B, C

$$F_2 = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{3} \implies \underline{F_2 = 3\sqrt{3}},$$
$$F_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}\, a^2 \implies \underline{a = 2\sqrt{3}}.$$



9.4 Parabel

Definitionen zur Parabel

Eine **Parabel** ist die Menge aller Punkte, die von einem festen Punkt (dem Brennpunkt F) und einer festen Geraden (der Leitlinie L) den gleichen Abstand haben.

Übliche Bezeichnungen:

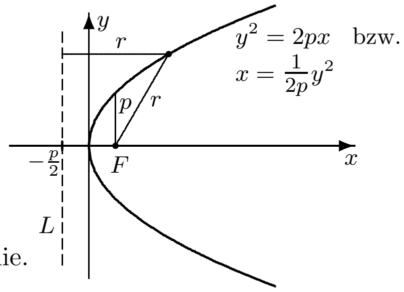
Brennpunkt: $F = (\frac{p}{2}, 0)$

Leitlinie: $L:\ x = -\frac{p}{2}$

Scheitelpunkt: $S = (0,0)$

p heißt **Halbparameter** $(p > 0)$.

p ist der Abstand Brennpunkt – Leitlinie.



9.14 *Man skizziere*

(a) *die Parabel* $y^2 = 2px$ *für* $p = \frac{1}{4}$ *und* $p = 2$.

(b) *die Parabel* $y^2 = -2px$ *für* $p = \frac{1}{4}$ *und* $p = 2$.

(a) $y^2 = 2px$ für

$p = \frac{1}{4}$: $y^2 = \frac{1}{2}x$

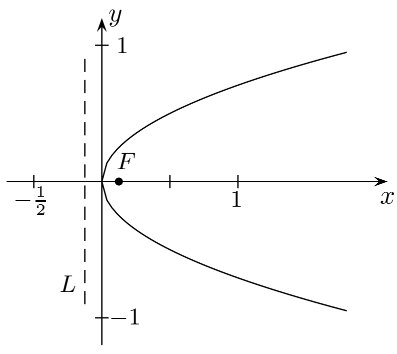
Brennpunkt: $F = (\frac{1}{8}, 0)$

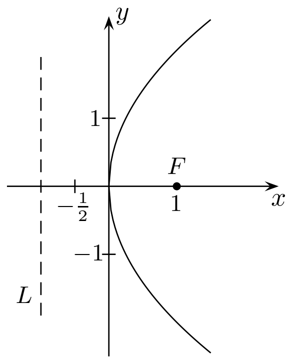
Leitlinie L: $x = -\frac{1}{8}$

$p = 2$: $y^2 = 4x$

Brennpunkt: $F = (1, 0)$

Leitlinie L: $x = -1$





Man beachte die unterschiedlichen Maßstäbe bei beiden Skizzen, um den Unterschied zwischen beiden Parabeln zu erkennen. Je größer p ist, desto weiter, je kleiner p wird $(p > 0)$, desto enger ist die Parabel geöffnet.

10.3 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen

$ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$, heißt quadratische Gleichung.
Für $a=1$ schreibt man:

$$\boldsymbol{x^2+px+q=0} \qquad \textbf{(Normalform)}.$$

Grundlegend für das Lösen quadratischer Gleichungen ist folgender Satz:

Ist $d>0$, so hat die Gleichung $x^2=d$ genau zwei Lösungen, nämlich

$$x_1=\sqrt{d} \text{ und } x_2=-\sqrt{d}, \quad \text{kurz:} \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{d}\,.$$

Achtung: $x^2=4$ hat die Lösungen $\pm\sqrt{4}$, also ± 2.
Aber: $\sqrt{4}=2$. (Wurzeln sind nach Definition ≥ 0.)

Zum Lösen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$ wird mittels sog. quadratischer Ergänzung unter Anwendung der binomischen Formeln umgeformt:

$$\begin{aligned} x^2+px+q=0 &\iff (x^2+px+\tfrac{p^2}{4})-\tfrac{p^2}{4}+q=0 \\ &\iff (x+\tfrac{p}{2})^2-\tfrac{p^2}{4}+q=0 \\ &\iff (x+\tfrac{p}{2})^2=\tfrac{p^2}{4}-q \end{aligned}$$

Quadratische Ergänzung nennt man dabei die Ersetzung

$$\boldsymbol{x^2+px} \quad \text{durch} \quad \boldsymbol{(x+\tfrac{p}{2})^2-\tfrac{p^2}{4}}.$$

$p, q-$Formel

Die quadratische Gleichung $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ hat die Lösungen

$$\boldsymbol{x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Man unterscheidet drei Fälle beim Lösen einer quadratischen Gleichung:

$\frac{p^2}{4}-q<0$: keine Lösung.

$\frac{p^2}{4}-q=0$: genau eine Lösung, nämlich $x=-\frac{p}{2}$.

$\frac{p^2}{4}-q>0$: zwei verschiedene Lösungen x_1, x_2.

10.13 *Man löse die quadratischen Gleichungen:*

(a) $x^2+2x-8=0$, (b) $x^2+5x+6=0$, (c) $x^2-2x-5=0$,
(d) $x^2+4x+4=0$, (e) $x^2+\frac{1}{10}x-\frac{3}{10}=0$, (f) $x^2+2x+3=0$,
(g) $x^2-5x+1=0$, (h) $x^2-2x+5=0$, (i) $x^2-6x=0$.

(a) $x^2+2x-8=0 \iff x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+8} \iff x_{1,2}=-1\pm 3$
$\iff \underline{x_1=2}$, $\underline{x_2=-4}$.

(b) $x^2+5x+6=0 \iff x_{1,2}=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6} \iff x_{1,2}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$
$\iff \underline{x_1=-2}$, $\underline{x_2=-3}$.

LGSe in Matrizenschreibweise

Bezeichnungen – erläutert am Eingangsbeispiel $\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 7x - 4y &= -1 \end{aligned}$:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ heißt **Koeffizientenmatrix**,

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **Variablenvektor**, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ **Vektor der rechten Seite**.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 7x - 4y &= -1 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 7x-4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \iff A\vec{x} = \vec{b}$$

Die folgenden Beispiele zeigen, dass man LGSe schematisiert lösen kann, indem man nur die Koeffizientenmatrix und den Vektor der rechten Seite betrachtet.

Beispiel $\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 7x - 4y &= -1 \end{aligned}$ schematisiert gelöst:

x	y		Regie
$\boxed{2}$	3	8	7
7	-4	1	-2
0	$\boxed{29}$	58	

Erläuterung: Man wählt z.B. die erste Spalte (also die von x) und markiert eine möglichst einfache Zahl, hier 2, also $\boxed{2}$. Aus dieser markierten Gleichung wird später x berechnet. Mittels der 2 erzeugt man eine Null in der ersten Spalte, d.h. man entfernt (eliminiert) x aus der zweiten Gleichung. Mit welcher Rechenoperation das bei Addition der beiden entstehenden Gleichungen geschieht, schreibt man in die Spalte Regie, um später zu wissen, wie man gerechnet hat. Hier addiert man also das 7-fache der ersten Gleichung zum (-2)-fachen der zweiten Gleichung. Das alte LGS ist nun ersetzt durch die Gleichung mit der Markierung $\boxed{2}$ und die neue Gleichung (die beiden Gleichungen mit Markierungen). Die neue Gleichung $29y = 58$ liefert $y = 2$, und Einsetzen in die durch $\boxed{2}$ markierte Gleichung liefert $x = 1$.

12.2 *Man schreibe die beiden LGSe aus* [12.1] *in Matrizenschreibweise* $A\vec{x} = \vec{b}$ *und löse sie schematisiert.*

Die LGSe aus [12.1] lauten in Matrizenschreibweise:

$$\text{(a)} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Schematische Lösung von $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$:

x	y		Regie
1	$\boxed{-1}$	1	1
2	1	5	1
$\boxed{3}$	0	6	

$3x = 6$ liefert $\underline{x = 2}$ und Einsetzen in die durch $\boxed{-1}$ markierte Gleichung dann $2 - y = 1$, also $\underline{y = 1}$.

Lösung in vektorieller Schreibweise: $\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

(b) Schematische Lösung von $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$:

x_1	x_2		Regie
2	−3	10	1
5	$\boxed{1}$	8	3
$\boxed{17}$	0	34	

$17x_1 = 34$ liefert $\underline{x_1 = 2}$, und Einsetzen in die durch $\boxed{1}$ markierte Gleichung liefert dann $\underline{x_2 = -2}$.

Lösung in vektorieller Schreibweise: $\underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

12.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Ehe wir ein Verfahren zur Lösung eines allgemeinen LGS formulieren, zeigen wir, wie das vorgestellte schematisierte Lösungsverfahren leicht zur Lösung eines LGS mit 3 Gleichungen und 3 Variablen ausgebaut werden kann.

12.3 *Man löse das LGS*
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - 3y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y - 5z &= 2 \end{aligned}$$
schematisch.

x	y	z		Regie	
$\boxed{1}$	2	−1	2	−2	−3
2	−3	4	3	1	
3	4	−5	2		1
0	−7	6	−1	1	
0	−2	$\boxed{-2}$	−4	3	
0	$\boxed{-13}$	0	−13		

Man wählt die erste Spalte und markiert 1. Aus dieser markierten Gleichung wird später x berechnet! Mittels der 1 erzeugt man Nullen in der ersten Spalte, d.h. man eliminiert x aus den zwei restlichen Gleichungen. Das alte LGS ist nun ersetzt durch die markierte Gleichung und die zwei neuen Gleichungen. Wieder markiert man ein Element, z.B. -2 in der z-Spalte, mit dem man in der betreffenden Spalte Nullen erzeugt.

Nun wird noch das von Null verschiedene Element in der letzten (neuen) Zeile markiert. Das gegebene Gleichungssystem ist nun ersetzt durch die drei markierten Gleichungen, also durch das äquivalente LGS

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ - 2y - 2z &= -4 \\ - 13y &= -13 \end{aligned}$$

Dieses LGS hat eine einfache Struktur. Aus der letzten Gleichung $-13y = -13$ folgt nämlich sofort $\underline{y = 1}$. Setzt man dies in die vorletzte Gleichung ein, erhält man $-2 - 2z = -4$ und kann nach z auflösen. Man erhält $\underline{z = 1}$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert dann noch $x + 2 - 1 = 2$ und man kann nach x auflösen. Es ist $\underline{x = 1}$. (Das Auflösen heißt "Rückwärtseinsetzen".)

Das LGS hat die eindeutig bestimmte Lösung $\vec{x} = \underline{(1, 1, 1)}$.

Dieses Verfahren wird nun verallgemeinert.
Ein gegebenes LGS wird mittels elementarer Umformungen in ein einfacher zu lösendes LGS umgeformt, das genau die gleichen Lösungen hat.

Elementare Umformungen

- Multiplikation einer Gleichung (Zeile) mit einem Faktor $\lambda \neq 0$.
- Addition einer Gleichung (Zeile) zu einer anderen.
- Vertauschen zweier Gleichungen, also zweier Zeilen.
- Addition des μ–fachen einer Gleichung (Zeile) zum λ–fachen ($\lambda \neq 0$) einer anderen Gleichung (Zeile).

Elementare Umformungen sind äquivalente Umformungen, die folglich die Lösungsmenge eines LGS nicht verändern.

Natürlich darf man auch Spalten von A vertauschen, wenn man dabei die Variablen umbenennt.
Um Schreibarbeit zu sparen und die Übersicht zu behalten, empfiehlt sich z.B. folgendes Verfahren:

Gaußsches Eliminationsverfahren

Man betrachtet nur das Koeffizientenschema, also die Matrix A und den Vektor $\vec{b}$ der rechten Seite. In A sucht man eine Spalte mit möglichst vielen Nullen und einer möglichst einfachen Zahl $\neq 0$. Diese wird markiert und mit ihrer Hilfe werden in der entsprechenden Spalte mittels elementarer Umformungen Nullen erzeugt. Man benutzt also **eine** Gleichung, um in den übrigen eine Variable zu eliminieren.
Dieses Verfahren setzt man fort, bis man ein hinreichend einfaches LGS erhält.

Die folgenden drei Beispiele beschreiben die einzigen **drei** Möglichkeiten, mit denen dieses Verfahren enden kann. Wir beschränken uns wieder auf Systeme mit 2 bzw. 3 Variablen.

12.4 *Man löse die folgenden LGSe:*

(a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x - y &= -5 \\ 3x - 2y &= -12 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

(a)

x	y		Regie	
2	3	5	1	
1	$\boxed{-1}$	-5	3	-2
3	-2	-12		1
5	0	-10	1	
$\boxed{1}$	0	-2	-5	
0	0	0		

Das gegebene LGS ist nun ersetzt durch die beiden markierten Gleichungen und die letzte Gleichung. Diese ist für alle (x, y) erfüllt und wird weggelassen. Man erhält also das äquivalente LGS $\begin{aligned} x - y &= -5 \\ x &= -2 \end{aligned}$.
Rückwärtseinsetzen liefert
$x = -2, \quad (-2) - y = -5$, also $y = 3$.
Das LGS hat die eindeutige Lösung $\underline{(-2, 3)}$.

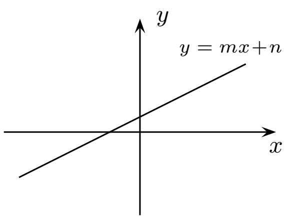
13.2 Ungleichungen mit zwei Variablen

$$\boxed{\text{Lösungsmengen von Ungleichungen mit zwei Variablen (in der Regel } x, y\text{) sind hier Teilmengen von } \mathbb{R}^2.}$$

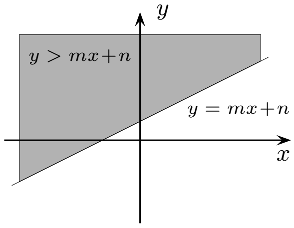
Man erkennt sie, indem man die **Grenzkurven** zeichnet. Diese erhält man, indem man das Ungleichheitszeichen durch "=" ersetzt.
Wir behandeln zunächst **lineare Ungleichungen** in zwei Variablen

$$\boxed{ax + by \leq c \quad (a, b, c \in \mathbb{R}\,, (a, b) \neq (0, 0)),}$$

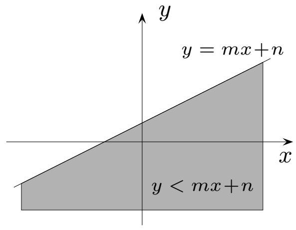
wobei statt $\leq$ auch $<$, $\geq$ oder $>$ stehen kann.
Die durch $ax+by = c$ gegebenen Grenzkurven sind Geraden (s. [Abschnitt 14.6]) und die Lösungsmenge der zugehörigen Ungleichung ist eine **Halbebene**. Für $b \neq 0$ kann man nach y auflösen und man schreibt, wie in den folgenden Skizzen, die Grenzgerade in der Form $y = mx + n$.



Lösungsmenge von $y = mx + n$: Die Gerade.



Lösungsmenge von $y > mx + n$: Die Halbebene oberhalb der Geraden.

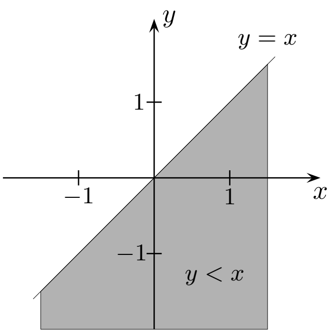


Lösungsmenge von $y < mx + n$: Die Halbebene unterhalb der Geraden.

13.14 *Man skizziere die Lösungsmenge in der (x, y)-Ebene von*

(a) $y < x$, (b) $x + 2y + 1 \geq 0$.

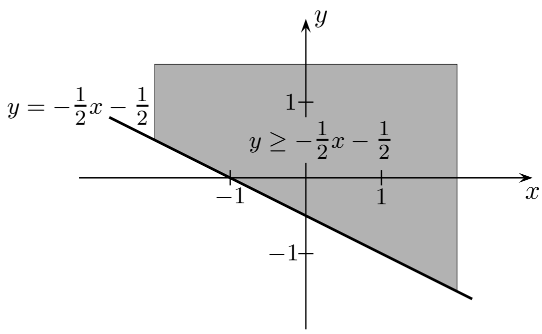
(a) Die Grenzgerade ist $y = x$. Lösungsmenge der Ungleichung ist die gefärbte Halbebene unterhalb der Grenzgeraden ohne die Grenzgerade selbst.



(b) Bestimmung der Grenzgeraden:

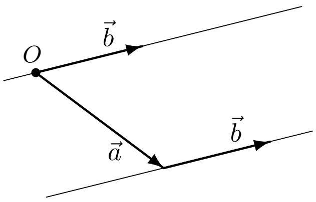
$$x + 2y + 1 \geq 0 \iff 2y \geq -x - 1$$
$$\iff y \geq -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

Es wird die Grenzgerade $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ skizziert, und das Ungleichungszeichen zeigt, welche Halbebene die Lösungsmenge ist (siehe oben). Hier gehört die Grenzgerade zur Lösungsmenge.



14.6 Geraden in der Ebene

Ist $\vec{b} \neq \vec{0}$ und durchläuft der Parameter r die reellen Zahlen, so liegen die Endpunkte von $r\vec{b}$ auf der durch $\vec{b}$ bestimmten Geraden.



$G: \ \vec{x} = r\vec{b}$ ist eine Gleichung der Geraden durch den Nullpunkt mit dem Richtungsvektor $\vec{b}$.

$G': \ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}$ ist eine Gleichung der zur obigen Geraden parallelen Geraden, die durch den Endpunkt von $\vec{a}$ verläuft.

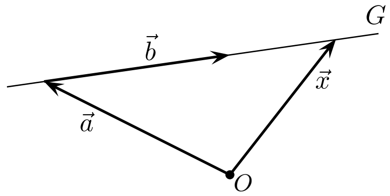
Geraden in der Ebene

Parameterdarstellung einer Geraden

(1)

durch den Endpunkt von $\vec{a}$ mit dem **Richtungsvektor** $\vec{b} \neq \vec{0}$:

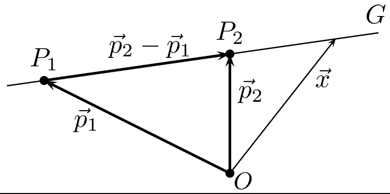
$\boldsymbol{G: \ \vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}}$, $r \in \mathbb{R}$.



(2)

durch zwei verschiedene Punkte P_1 und P_2:

$\boldsymbol{G: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + r(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)}$, $r \in \mathbb{R}$.

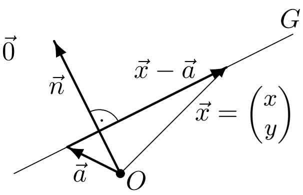


Koordinatendarstellung einer Geraden

durch den Endpunkt von $\vec{a}$

senkrecht zum **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

von G ($\vec{n}$ steht senkrecht auf dem Richtungsvektor von G).



Mit $\vec{n} \cdot \vec{a} = c$ gilt:

$\boldsymbol{G: \ ax + by = c}$ Koordinatendarstellung der Geraden G.

Die Skizze zeigt, dass für Geradenpunkte (x, y) gilt:
$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ bzw. $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}$. Das ausgerechnete Skalarpodukt

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \iff ax + by = c$$

liefert die Koordinatendarstellung der Geraden G.

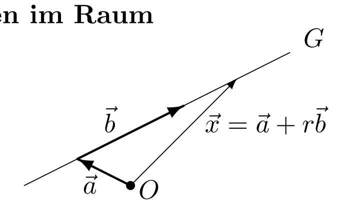
$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Geraden $\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y = c$.

14.7 Geraden und Ebenen im Raum

Die im vorigen Abschnitt angegebene Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene lässt sich wortwörtlich als Geradendarstellung im Raum übertragen.

Darstellung einer Geraden im Raum

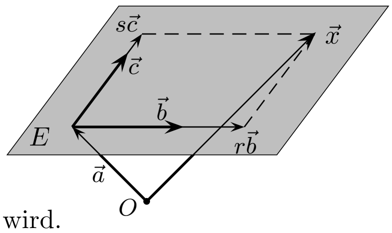
Ist $\vec{a}$ ein im Ursprung angetragener Vektor und $\vec{b} \neq \vec{0}$ ein beliebiger Vektor, so heißt
$\boldsymbol{G:}\ \ \boldsymbol{\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b}}\ ,\ r \in \mathbb{R}\ ,$
Parameterdarstellung der Geraden G durch den Endpunkt von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{b}$.



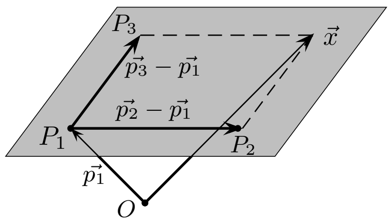
Für eine Ebene im Raum gibt es verschiedene Darstellungen.

Parameterdarstellung einer Ebene

Ist $\vec{a}$ ein im Ursprung angetragener Vektor und sind $\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}$ zwei nicht parallele Vektoren, so heißt
$\boldsymbol{E:}\ \ \boldsymbol{\vec{x} = \vec{a} + r\vec{b} + s\vec{c}}\ ,\ r, s \in \mathbb{R}$
Parameterdarstellung der Ebene E durch den Endpunkt von $\vec{a}$, die durch die **Richtungsvektoren** $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannt wird.



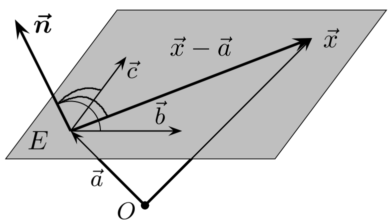
Sind P_1, P_2, P_3 drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist
$E:\ \vec{x} = \vec{p_1} + r(\vec{p_2} - \vec{p_1}) + s(\vec{p_3} - \vec{p_1})$
eine Parameterdarstellung der Ebene E durch P_1, P_2, P_3.



Koordinatendarstellung einer Ebene

$\boldsymbol{E:}\ \ \boldsymbol{ax + by + cz = d}$ heißt Koordinatendarstellung von E.
$\boldsymbol{\vec{n} = (a, b, c)} \neq \vec{0}$ ist dabei ein **Normalenvektor** von $\boldsymbol{E}$.
Diese Darstellung ergibt sich aus der folgenden Ebenendarstellung durch Ausrechnen des Skalarprodukts mit $\vec{n} \cdot \vec{a} = d$.

Ist $\vec{a}$ ein im Ursprung angetragener Vektor und $\vec{n} \neq \vec{0}$ ein auf E senkrecht stehender Vektor, so heißt
$\boldsymbol{E:}\ \ \boldsymbol{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0}$ oder $\boldsymbol{\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a}}$
Normalendarstellung der Ebene E durch den Endpunkt von $\vec{a}$, die senkrecht zu $\vec{n}$ verläuft.



(Die Normalendarst. ist eine vektorielle Schreibweise der Koordinatendarst.)

Da man zwei Möglichkeiten hat, eine Ebene darzustellen (Parameterdarstellung und Koordinatendarstellung), interessiert es, wie man beide Darstellungen ineinander überführt.

Umformung
von Ebenendarstellungen

Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}} \xrightarrow[\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}=(a,b,c)]{\text{Multiplikation mit}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ \vec{n}\cdot\vec{x}=\vec{n}\cdot\vec{a}\quad\text{bzw.}\\ ax+by+cz=d\end{array}}$$

Man multipliziert die Parameterdarstellung mit einem Vektor $\vec{n}$, der auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht (**Normalenvektor**), z.B. mit $\vec{n}=\vec{b}\times\vec{c}$.

Koordinatendarstellung in Parameterdarstellung

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Koordinatendarstellung}\\ ax+by+cz=d\end{array}} \xrightarrow[\text{1 Gleichung, 3 Unbekannte}]{\text{Lösen des LGS}} \boxed{\begin{array}{c}\text{Parameterdarstellung}\\ \vec{x}=\vec{a}+r\cdot\vec{b}+s\cdot\vec{c}\end{array}}$$

Man löst das LGS $ax+by+cz=d$.
Z.B. indem man, falls $a\neq 0$ ist, $y=r$ und $z=s$ setzt und nach x auflöst.
Es ist $x=\frac{d}{a}-\frac{b}{a}r-\frac{c}{a}s$. Das Ergebnis schreibt man vektoriell:

$$(\star)\qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d}{a}-\frac{b}{a}r-\frac{c}{a}s\\ r\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d/a\\0\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-b/a\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-c/a\\0\\1\end{pmatrix}$$

und erhält die Ebene in Parameterdarstellung.

14.44 *Man bestimme eine Koordinatendarstellung der Ebene*

$E:\quad \vec{x}=(2,-1,3)+r(2,1,-1)+s(1,1,2).$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ ist gegeben durch $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

Skalarproduktbildung der Parameterdarstellung mit $\vec{n}=(3,-5,1)$ ergibt:

$$\vec{n}\cdot\vec{x} = \vec{n}\cdot(2,-1,3)+r\,\underbrace{\vec{n}\cdot(2,1,-1)}_{=0}+s\,\underbrace{\vec{n}\cdot(1,1,2)}_{=0}$$

$$(3,-5,1)\cdot(x,y,z) = (3,-5,1)\cdot(2,-1,3)=14$$

$E:\quad \underline{3x-5y+z=14}\qquad$ ist eine Koordinatendarstellung.

15 Finanzmathematik

Zinssatz jährlich $p\% = \frac{p}{100} = q-1, \qquad q = 1+\frac{p}{100}$ heißt **Zinsfaktor**.
Ist $p\% = 4.5\% = \frac{4.5}{100} = 0.045$, dann ist $q = 1+\frac{p}{100} = 1.045,\ q-1 = 0.045$.

Einmalige Zahlung: Anfangskapital K
Bezeichnungen: Anfangskapital $= K = K_0 = B$ (heißt auch Barwert)
Kapital K_n nach n Jahren (Zinseszinsformel): $\quad K_n = Kq^n$
Barwert B einer in n Jahren fälligen Zahlung K_n: $\quad B = K = \dfrac{K_n}{q^n}$
Zinsfaktor q: $\quad q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}}$
Anzahl n der Jahre: $\quad q^n = \dfrac{K_n}{K} \Longrightarrow n \ln q = \ln \dfrac{K_n}{K} \Longrightarrow n = \dfrac{\ln K_n - \ln K}{\ln q}$
Faustformel: *Eine Verdoppelung tritt nach etwa* $\frac{70}{p}$ *Jahren ein, s.* [15.1 (b)].

Erläuterung der benutzten Formeln siehe [Seite 326 ff.].
Zur besseren Lesbarkeit benutzen wir in diesem Abschnitt
für den Multiplikationspunkt das Zeichen $*$.

15.1 *Ein Kapital $K = 12\,000$ € ist zu einem Zinssatz von 4.5% angelegt.*
(a) *Welches Endkapital K_{15} ergibt sich nach 15 Jahren?*
(b) *Nach wieviel Jahren n hat sich das Kapital verdoppelt?*

(a) $\boldsymbol{K_{15} = Kq^{15}} \quad = 12\,000 * 1.045^{15} = \underline{23\,223.39}$ € , Endkapital nach 15 Jahren.

(b) $Kq^n = 2K$ nach n auflösen (K kürzen und logarithmieren).
Zum Logarithmus, insbesondere zu ln siehe [Abschnitt 5.4].
$Kq^n = 2K \Longrightarrow q^n = 2 \Longrightarrow n \ln q = \ln 2 \Longrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln q} = \frac{\ln 2}{\ln 1.045} \approx \underline{15.75}$.
Nach <u>16 Jahren</u> hat sich also ein zu 4.5% angelegtes Kapital verdoppelt.
Die Faustformel zur Verdoppelung liefert das gleiche Ergebnis: $\frac{70}{p} \approx \underline{15.56} \approx 16$.

15.2 *Welches Kapital K (Barwert B) erbringt zu 4.5% Zinsen angelegt nach 15 Jahren ein Endkapital von 23 223.39 € ?*

$$\boldsymbol{K_n = Kq^n} \Longrightarrow K = B = \frac{K_n}{q^n} = \frac{23\,223.39}{1.045^{15}} \approx \underline{12\,000} \text{ € ist der Barwert.}$$

15.3 *Zu welchem Zinssatz $p\%$ muss ein Kapital von $K = 12\,000$ € angelegt werden, damit nach 15 Jahren ein Endkapital von 23 223.39 € erzielt wird?*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K_n = Kq^n} &\Longrightarrow q^n = \frac{K_n}{K} \\ &\Longrightarrow q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K}} = \sqrt[15]{\frac{23\,223.39}{12\,000}} \approx 1.045 = 1 + \frac{p}{100} \\ &\Longrightarrow p = 100(1.045 - 1) = \underline{4.5}, \end{aligned}$$

Das Kapital muss also zu <u>4.5%</u> angelegt werden.

16.2 Hexadezimalsystem

Dez.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Hex.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11

Umwandeln einer natürlichen Dezimalzahl in eine Hexadezimalzahl:

$3885_{10} = 15 \cdot 16^2 + 2 \cdot 16 + 13 = \mathrm{F2D}_{16}$

$$\begin{array}{rcrcrclcl} 3885 & : & 16 & = & 242 & \text{Rest} & 13_{10} & = & \mathrm{D}_{16} \\ 242 & : & 16 & = & 15 & \text{Rest} & 2_{10} & = & 2_{16} \\ 15 & : & 16 & = & 0 & \text{Rest} & 15_{10} & = & \mathrm{F}_{16} \end{array} \uparrow$$

Division mit Rest und Reste (hexadezimal) von unten nach oben notieren!

$\underline{3885_{10} = \mathrm{F2D}_{16}}$.

Umwandeln einer gebrochenen Dezimalzahl in Hexadezimalzahl:

$0.35 = 5 \cdot 16^{-1} + 9 \cdot 16^{-2} + \cdots$ (*Man sieht nicht so einfach, wie es weitergeht*)

$$\begin{array}{lcl} 0.35 \cdot 16 & = & 0.6 + 5 \\ 0.6 \cdot 16 & = & 0.6 + 9 \\ 0.6 \cdot 16 & = & 0.6 + 9 \end{array} \downarrow$$

Wiederholtes Multiplizieren mit 16 und Abspalten des ganzzahligen Anteils.

Reste von oben nach unten notieren!

$\underline{0.35_{10} = 0.5\overline{9}_{16}}$.

$0.58\overline{3}$ Zunächst $x = 0.58\overline{3}$ in einen gewöhnlichen Bruch umwandeln:

$$\begin{array}{rcl} 1000x & = & 583.\overline{3} \\ -\ 100x & = & 58.\overline{3} \\ \hline 900x & = & 525 \end{array}$$

$$x = \frac{525}{900}{}_{(10)} = \frac{7}{12}{}_{(10)}.$$

Wiederholtes Multiplizieren mit 16 und Abspalten des ganzzahligen Anteils.

$$\begin{array}{lcl} 7/12 \cdot 16 & = & 4/12 + 9 \\ 4/12 \cdot 16 & = & 4/12 + 5 \\ 4/12 \cdot 16 & = & 4/12 + 5 \end{array} \downarrow$$

Reste von oben nach unten notieren!

$\underline{0.58\overline{3}_{10} = 0.9\overline{5}_{16}}$.

Umwandeln einer ganzen Hexadezimalzahl in eine Dezimalzahl:

$3\mathrm{A4B}_{16} = 3 \cdot 16^3 + 10 \cdot 16^2 + 4 \cdot 16 + 11 = 14\,923_{10}$

$$\begin{array}{c|rrrr} & 3 & 10 & 4 & 11 \\ x = 16 & & 48 & 928 & 14912 \\ \hline & 3 & 58 & 932 & \underline{14923} \end{array}$$

Die Umwandlung kann auch mit dem Hornerschema durchgeführt werden!

$\underline{3\mathrm{A4B}_{16} = 14\,923_{10}}$.

Umwandeln einer gebrochenen Hexadezimalzahl in Dezimalzahl:

$x = 0.\mathrm{A8}_{16} = 10 \cdot 16^{-1} + 8 \cdot 16^{-2} = \frac{10}{16} + \frac{8}{256} = \frac{21}{32} = \underline{0.65625_{10}}$.

$$x = 0.\mathrm{A}\overline{8}_{16} \implies \begin{array}{rcl} 16^2 x & = & \mathrm{A8}\,.\,\overline{8}_{16} \\ -\ 16\,x & = & \mathrm{A}\,.\,\overline{8}_{16} \\ \hline 240\,x & = & (\mathrm{A8} - \mathrm{A})\,.\,0_{16} \quad = (168 - 10)_{10} = 158_{10} \end{array}$$

$$\implies x = \frac{158}{240} = \frac{79}{120} = 0.658\overline{3}_{10}, \text{ also } \underline{0.\mathrm{A}\overline{8}_{16} = 0.658\overline{3}_{10}}.$$

Umwandeln einer Dualzahl in eine Hexadezimalzahl:

$$\begin{aligned} 1738_{10} &= \underbrace{110}\,\underbrace{1100}\,\underbrace{1010}{}_2 = 6\mathrm{CA}_{16} \\ &= \;\;6 \quad\;\; \mathrm{C} \quad\;\; \mathrm{A} \end{aligned}$$

Dualzahl zu Viererblöcken zusammenfassen!