1.4 Bestimmung von Grenzwerten

Wichtige Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^r} = 0$ für $r > 0,\ c$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ für $\lvert a\rvert < 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} a^n \cdot n^k = 0$ für $\lvert a\rvert < 1,\ k \in \mathbb{N}$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für $a > 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ für $\lvert a\rvert > 1,\ k \in \mathbb{N}$ fest
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \approx 2.718$

Es gibt kein allgemeines Verfahren, Grenzwerte zu bestimmen.
Häufig versucht man, unbekannte Grenzwerte auf bekannte zurückzuführen.
Im Folgenden findet man einige dafür nützliche Rechenregeln und Verfahren.

Rechenregeln für Grenzwerte

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{lll} \lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b & & \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b & & \\ \lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b & & \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} & & \text{für } b_n \neq 0\ ,\ b \neq 0 \\ a_n \leq b_n \text{ für } n \geq n_0 \implies a \leq b & & \end{array}\right.$$

1.21 *Man bestimme ggf. den Grenzwert der Folgen (a_n):*
(a) $a_n = \frac{1}{n^2}$, (b) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n}$, (c) $a_n = \left(-\frac{4}{5}\right)^n$, (d) $a_n = \frac{3^n+2^n}{1-3^n}$,
(e) $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{e}}$, (f) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$, (g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$, (h) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

(a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot 0 = 0.$

(b) Man klammert die höchsten Potenzen von n aus, kürzt und erhält:
$$a_n = \frac{2n+1}{n^2+n} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 0 \cdot \frac{2+0}{1+0} = 0.$$

(c) Ist $\lvert a\rvert < 1$, so gilt $a^n \longrightarrow 0$. Also $\left(-\frac{4}{5}\right)^n \longrightarrow 0$.

(d) Es gilt $a_n = \frac{3^n+2^n}{1-3^n} = \frac{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)}{3^n(\frac{1}{3^n}-1)} = \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{\frac{1}{3^n}-1} \longrightarrow \frac{1+0}{0-1} = -1.$

(e) Ist $a > 0$, so gilt $\sqrt[n]{a} \longrightarrow 1$. Also $\sqrt[n]{\mathrm{e}} \longrightarrow 1$.

(f) $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$, also $\sqrt[n]{n^2} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \longrightarrow 1^2 = 1$.

(g) $\frac{n^k}{a^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ für $\lvert a\rvert > 1,\ k \in \mathbb{N}$ fest, also $\frac{n^2}{2^n} \longrightarrow 0$.

(h) Es gilt $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow \mathrm{e} \cdot (1 + 0) = \mathrm{e}$.

2.2 *Man berechne die Partialsummen bis s_4 der folgenden Reihen.*

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots,\qquad \text{(b)}\ \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ Die Reihe beginnt mit $k=1$, die Partialsummenfolge (s_n) also mit s_1. Diese sog. harmonische Reihe wird in [Abschnitt 2.3] behandelt.

$s_1=a_1=1,\quad s_2=a_1+a_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$

$s_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=s_2+a_3=\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6},$

$s_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=s_3+a_4=\frac{11}{6}+\frac{1}{4}=\frac{25}{12}.$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ Da die Summanden abwechselnde Vorzeichen haben, nennt man die Reihe eine **alternierende Reihe**.

$s_0=(-1)^0\frac{1}{0+1}=1,\quad s_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},\quad s_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=s_1+a_2=\frac{5}{6},$

$s_3=s_2+a_3=\frac{5}{6}-\frac{1}{4}=\frac{7}{12},\qquad s_4=s_3+a_4=\frac{7}{12}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}.$

2.3 *Man berechne die Partialsummen bis s_4 der folgenden Reihen und gebe einen geschlossenen Ausdruck (eine Formel) für s_n an.*

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{\infty}k,\qquad \text{(b)}\ \sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{1}{2})^k,\qquad \text{(c)}\ \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1),\qquad \text{(d)}\ \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)}.$$

Eine Formel für s_n findet man direkt durch Rückgriff auf bekannte Formeln, durch vollständige Induktion oder z.B. in (d) durch Partialbruchzerlegung.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}k=1+2+3+4+\cdots,\quad a_k=k.$

$s_1=1,$

$s_2=1+2=s_1+2=3,$

$s_3=1+2+3=s_2+3=6,$

$s_4=1+2+3+4=s_3+4=10.$

$$\boxed{s_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}\,n(n+1)}$$

Summe der ersten n nat. Zahlen [**EM1**, 2.16(a), 3.28]

ergibt direkt $s_n=\frac{1}{2}\,n(n+1).$

(b) $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots,\quad a_k=(\frac{1}{2})^k.$

$s_0=(\frac{1}{2})^0=1\,,$

$s_1=(\frac{1}{2})^0+(\frac{1}{2})^1=s_0+a_1=\frac{3}{2}\ =2-\frac{1}{2},$

$s_2=s_1+a_2=\frac{3}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}\ =2-\frac{1}{4},$

$s_3=s_2+a_3=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}=2-\frac{1}{8}\ =2-\frac{1}{2^3},$

$s_4=s_3+a_4=\frac{15}{8}+\frac{1}{16}=\frac{31}{16}=2-\frac{1}{16}\ =2-\frac{1}{2^4}.$

Vermutung $s_n=\frac{2^{n+1}-1}{2^n}\ =2-\frac{1}{2^n}.$

$$\boxed{s_n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q\neq 1,}$$

endliche geometrische Reihe [**EM1**, Seite 32]

ergibt mit $q=\frac{1}{2}$ direkt

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}(\tfrac{1}{2})^k=\frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^n}.$$

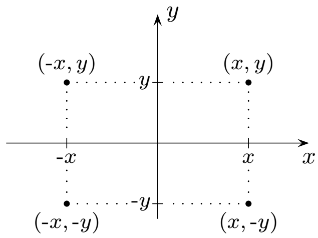
3.46 *Man beachte Symmetrien und skizziere folgende Funktionen:*

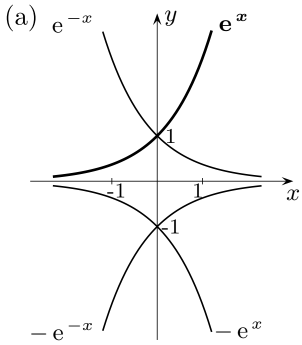
(a) $y = \mathrm{e}^{x}, \quad y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y = -\mathrm{e}^{x}, \quad y = -\mathrm{e}^{-x}.$

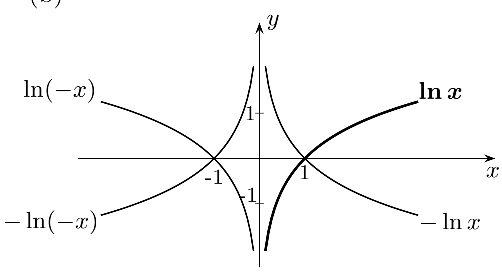
(b) $y = \ln x, \quad y = \ln(-x), \quad y = -\ln x, \quad y = -\ln(-x).$

Symmetrie, siehe [Seite 69]:

$x \rightarrow -x$	Spiegelung an der y-Achse,
$y \rightarrow -y$	Spiegelung an der x-Achse,
$x \rightarrow -x$ und $y \rightarrow -y$	Spiegelung am Nullpunkt.







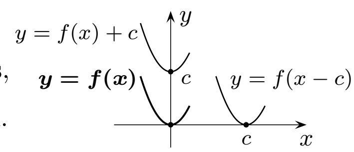
3.47 *Man skizziere folgende Funktionen*

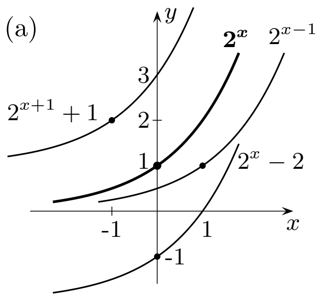
(a) $y = 2^{x}, \quad y = 2^{x-1}, \quad y = 2^{x} - 2, \quad y = 2^{x+1} + 1.$

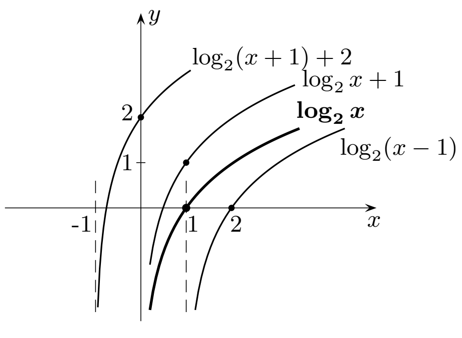
(b) $y = \log_2 x, \quad y = \log_2(x-1), \quad y = \log_2 x + 1, \quad y = \log_2(x+1) + 2.$

Verschiebung, siehe [Seite 69]:

$y = f(x-c)$	Verschieb. um c nach rechts/links,
$y = f(x) + c$	Verschieb. um c nach oben/unten.





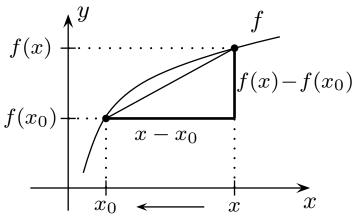


4.2 Differenzieren

Ableitung in einem Punkt

$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert. In diesem Fall heißt

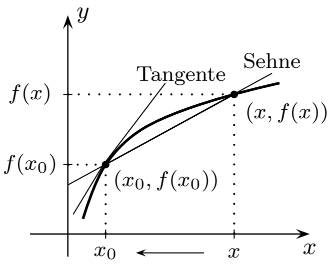
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \textbf{Ableitung} \text{ von } f \text{ in } x_0.}$$



Ist $y = f(x)$, so setzt man: $\quad f'(x_0) = y'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$.

Die Ableitung $f'(x_0)$ heißt auch **Differenzialquotient** von f in x_0 und ist der Grenzwert des **Differenzenquotienten** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist die Steigung der **Sehne** (Sekante) von f durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$.

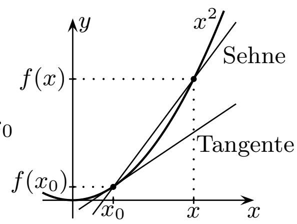


Der Differenzialquotient $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist der Grenzwert der Sehnensteigungen für $x \to x_0$, ist also die Steigung der **Tangente** [Seite 174] bzw. die Steigung von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

4.20 *Man bestimme Differenzen- und Differenzialquotient von $f(x) = x^2$ in x_0.*

Der Differenzenquotient (Sehnensteigung) von f in x_0 ist $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0$.

Der Differenzialquotient (Tangentensteigung) von f in x_0 ist $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} (x+x_0) = 2x_0$.



Also ist f differenzierbar in x_0. Die Ableitung ist $f'(x_0) = 2x_0$, d.h. $(x^2)' = 2x$.

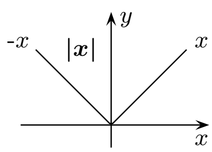
4.21 *Man zeige, dass $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar ist.*

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht, denn der rechtsseitige Grenzwert ist

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$ (rechtsseitige Steigung).

Der linksseitige Grenzwert ist

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$ (linksseitige Steigung).



Merke: $\boxed{\text{Differenzierbare Kurven haben keine Knicke!}}$

4.7 Kurvendiskussionen

Die Differenzialrechnung bietet viele Möglichkeiten, Funktionen zu untersuchen. Wie ausführlich eine Kurvendiskussion ist, hängt von der Aufgabe ab.

Kurvendiskussionen

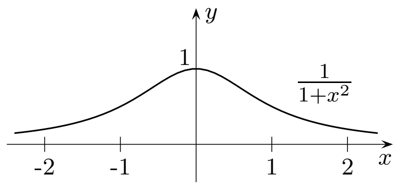
- Ohne Differenzieren, also direkt am Funktionsterm, kann man oft **Vorzeichen, Nullstellen, Symmetrie-** und **Randverhalten** ablesen und damit die **Funktion skizzieren**.
- Die 1. Ableitung braucht man in der Regel für **Monotonie** und **Extremwertbestimmung**.
- Die 2. Ableitung nützt bei **Krümmungsverhalten** und **Wendepunkten**.
- l'Hospital hilft häufig bei der Untersuchung des Randverhaltens.

4.62 *Man bestimme Symmetrieverhalten, Vorzeichen, Nullstellen und Randverhalten und skizziere f.*
Bestimme dann Extrema, Krümmungsverhalten und Wendepunkte.

(a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, (c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(a) Symmetrieverhalten:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist gerade, denn $f(-x) = f(x)$,
f ist symmetrisch zur y-Achse.



Vorzeichen und Nullstellen:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, f hat keine Nullstellen.

Randverhalten:

Für $x \to \pm\infty$ folgt: $f(x) \to 0$.

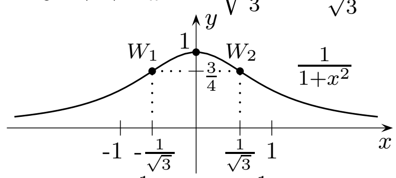
Extrema: $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0$.

$$f' \text{ ist } \begin{cases} > 0 & \text{für } x < 0 \\ < 0 & \text{für } x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} f' \text{ wechselt das Vorz. bei 0 von + zu } -. \\ f \text{ hat bei 0 ein Maximum mit } f(0) = 1. \\ (0,1) \text{ ist absoluter Maximalpunkt.} \end{array}$$

Krümmungsverhalten und Wendepunkte:

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\cdot 2\cdot 2x(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f'' \text{ ist } \begin{cases} > 0 & \text{für } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ < 0 & \text{für } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$



$$f \text{ ist } \begin{cases} \text{konvex} & \text{für } |x| > \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{also für } & x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{3}} < x, \\ \text{konkav} & \text{für } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{also für } & -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

f besitzt zwei Wendepunkte: $W_1 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$ und $W_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4})$.

Substitutionsregel für bestimmte Integrale

Bei bestimmten Integralen können die Grenzen gleich mit substituiert werden. Das erspart die Rücksubstitution vor dem Einsetzen der Grenzen.

$$\int_{x=a}^{b} f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx \;=\; \int_{t=g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$$

Substitution: $\boxed{\begin{array}{rcl|lcl} g(x) & = & t & x=a & \Leftrightarrow & t=g(a) \\ g'(x)\,dx & = & dt & x=b & \Leftrightarrow & t=g(b) \end{array}}$

Die Angabe der Grenzen in der Form "$x = a$" bzw "$t = g(a)$" hilft, Fehler beim Substituieren der Grenzen zu vermeiden.

5.21 *Man berechne mit der Substitutionsregel:*

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{2x+5}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2}(1+\sin x)\cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{dx}{x\ln x}$, (e) $\displaystyle\int_{0}^{4\pi}\sin\sqrt{x}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(a) $$\int_{x=-2}^{2}\sqrt{2x+5}\;dx = \frac{1}{2}\int_{t=1}^{9}\sqrt{t}\;dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} 2x+5=t & x=-2 \Leftrightarrow t=1 \\ dx=\frac{1}{2}dt & x=2 \;\;\Leftrightarrow t=9 \end{array}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{3}t^{3/2}\right]_{t\,=\,1}^{9} = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.$$

(b) $$\int_{x=0}^{\pi/2}(1+\sin x)\cos x\,dx = \int_{t=0}^{1}(1+t)\,dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} \sin x=t & x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ \cos x\,dx=dt & x=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t=1 \end{array}\right]$$
$$= \left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{t\,=\,0}^{1} = \frac{3}{2}.$$

(c) $$\int_{x=0}^{\pi}\mathrm{e}^{\cos x}\sin x\,dx = -\int_{t=1}^{-1}\mathrm{e}^{t}\,dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} \cos x=t & x=0 \Leftrightarrow t=1 \\ -\sin x\,dx=dt & x=\pi \Leftrightarrow t=-1 \end{array}\right]$$
$$= \int_{t=-1}^{1}\mathrm{e}^{t}\,dt = \big[\,\mathrm{e}^{t}\big]_{t=-1}^{1} = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 2.35.$$

(d) $$\int_{x=\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{dx}{x\ln x} = \int_{t=1}^{2}\frac{1}{t}\,dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} \ln x=t & x=\mathrm{e} \;\;\Leftrightarrow t=1 \\ \frac{dx}{x}=dt & x=\mathrm{e}^2 \Leftrightarrow t=2 \end{array}\right]$$
$$= \big[\ln|t|\big]_{t=1}^{2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

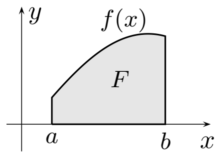
(e) $$\int_{x=0}^{4\pi}\sin\sqrt{x}\,dx = 2\int_{t=0}^{2\sqrt{\pi}}\underset{\downarrow}{t}\;\underset{\uparrow}{\sin t}\;dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} x=t^2 & x=0 \;\;\Leftrightarrow t=0 \\ dx=2t\,dt & x=4\pi \Leftrightarrow t=2\sqrt{\pi} \end{array}\right]$$
$$= 2\big[\sin t - t\cos t\big]_{t=0}^{2\sqrt{\pi}} = 2(\sin 2\sqrt{\pi} - 2\sqrt{\pi}\cos 2\sqrt{\pi}) - 0 \approx 5.74.$$

(f) $$\int_{0}^{1/2}\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{t=0}^{\pi/6}t\,dt \qquad \left[\begin{array}{r|l} \arcsin x=t & x=0 \Leftrightarrow t=0 \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt & x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6} \end{array}\right]$$
$$= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t\,=\,0}^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{72} \approx 0.14.$$

5.4 Anwendungen

Volumen eines Rotationskörpers

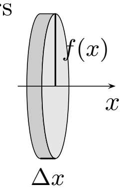
Ein Rotationskörper entsteht durch Rotation einer sog. **erzeugenden Fläche** um die x-Achse.

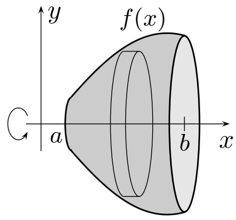


Die erzeugende Fläche F sei die Fläche zwischen der Funktion $y = f(x) \geq 0$ und der x-Achse über dem Intervall $[a, b]$.

Dann ist das Volumen des Rotationskörpers

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$





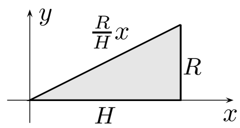
Anschaulich:

Der Rotationskörper ist zusammengesetzt aus dünnen Kreisscheiben (Zylindern) mit Radius $f(x)$ und Dicke Δx. Das Volumen ΔV dieser Scheiben ist *Grundfläche* $\times$ *Höhe*, also $\Delta V = \pi f^2(x)\,\Delta x$. Das Gesamtvolumen ist daher

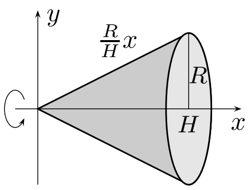
$$V \approx \sum \Delta V = \pi \sum f^2(x)\,\Delta x \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

5.29 *Man berechne das Volumen V des Kreiskegels mit Radius R und Höhe H.*

Die x-Achse sei die Rotationsachse des Kegels, seine Spitze liege im Ursprung. Seine Mantellinie ist die Gerade $y = \frac{R}{H}x$, die erzeugende Fläche das rechtwinklige Dreieck unter der Geraden im Intervall $[0, H]$.



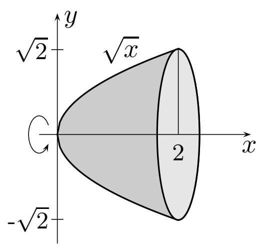
Das Volumen des Kegels ist daher:



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^H \left(\tfrac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^H = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H. \\ &= \tfrac{1}{3} \times \textit{Grundfläche} \times \textit{Höhe}, \text{ siehe etwa } [\textbf{FH}, \text{S. } 32]. \end{aligned}$$

5.30 *Man berechne das Volumen V des Rotationsparaboloids, das durch Rotation der Fläche zwischen $y = \sqrt{x}$ und der x-Achse über dem Intervall $[0, 2]$ entsteht.*

Das Volumen des Rotationsparaboloids ist



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 \sqrt{x}^{\,2}\,dx \\ &= \pi \int_0^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\left[x^2\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}[4-0] = 2\pi. \end{aligned}$$

6 Kombinatorik

6.1 Permutationen und Kombinationen

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten muss man häufig die Anzahl der Elemente gewisser Mengen berechnen. Für eine Menge M bezeichnet $|M|$ die Anzahl ihrer Elemente, siehe auch [**EM 1**, Kapitel 1].

Abzählung von Mengen

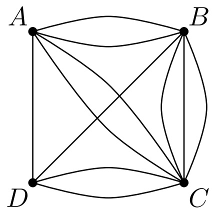
M und N seien endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$.

1) Ist $M \cap N = \emptyset$, so gilt $|M \cup N| = m + n$. **Additionsprinzip**
2) Ist $M \subseteq N$, so gilt $|N \setminus M| = n - m$.
3) $|M \times N| = m \cdot n$. **Multiplikationsprinzip**

6.1 *Es seien $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $N = \{1, 3, 5\}$ und $R = \{3, 5\}$.*
Man gebe $|M \cup N|$, $|N \setminus R|$, $|R \times N|$ und $|M \setminus R|$ an.

$\|M \cup N\| = 4 + 3 = 7,$	da $M \cap N = \emptyset$.
$\|N \setminus R\| = 3 - 2 = 1,$	da $R \subseteq N$.
$\|R \times N\| = 2 \cdot 3 = 6,$	$R \times N = \{(3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$.
$\|M \setminus R\| = \|M\| = 4,$	hier wird direkt $M \setminus R$ gebildet, da keine der Regeln anwendbar ist.

6.2 *Vier Orte A, B, C, D sind durch ein Straßennetz gemäß nebenstehender Skizze verbunden.*



(a) *Wieviele verschiedene Wege $B - C - D$ gibt es?*

(b) *Wieviele verschiedene Rundreisen $A - B - C - D - A$ gibt es?*

(c) *Auf wieviele verschiedene Arten kann man von A nach D gelangen, wenn kein Ort mehr als einmal besucht werden soll?*

(a) Es gibt 3 Wege v_1, v_2, v_3 von B nach C und 2 Wege w_1, w_2 von C nach D. Mit $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $N = \{w_1, w_2\}$ gibt es nach dem Multiplikationsprinzip $|M \times N| = 3 \cdot 2 = 6$ Wege $B - C - D$.

(b) Entsprechend (a) gibt es nach dem Multiplikationsprinzip genau $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ verschiedene Rundreisen $A - B - C - D - A$.

(c) Man kann auf folgenden Wegen von A nach D gelangen, ohne einen Ort zweimal zu besuchen:

$A - D$	1 Möglichkeit	
$A - B - D$	$2 \cdot 1 = 2$ Möglichkeiten	(Multiplikationsprinzip)
$A - B - C - D$	$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Möglichkeiten	"
$A - C - D$	$2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten	"
$A - C - B - D$	$2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten	"

7 Stochastik

7.1 Zufallsexperimente, Ereignisse, relative Häufigkeiten

Zufallsexperiment

Ein **Zufallsexperiment** hat folgende Eigenschaften:

- Es wird unter genau festgelegten Bedingungen durchgeführt,
- alle möglichen Ergebnisse des Experiments sind vorher bekannt,
- das Ergebnis des Experiments lässt sich nicht vorhersagen,
- es kann unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholt werden.

Ergebnisse, Ereignisse

Ω bezeichnet die endliche **Ergebnismenge** eines Zufallsexperiments und wird auch **Grundraum** oder **Ergebnisraum** genannt.
$\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$ bezeichnen einzelne Ergebnisse.

Ein zufälliges Ereignis oder kurz **Ereignis** ist eine Teilmenge von Ω.
Jede einelementige Teilmenge $\{\omega\}$ von Ω heißt **Elementarereignis**.

Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ **tritt ein** bzw. **findet statt bei einem Zufallsexperiment**, wenn das Ergebnis ω des Experiments ein Element von A ist, anderenfalls tritt A beim Experiment nicht ein bzw. findet nicht statt:

$$A \text{ tritt ein} \iff \omega \in A, \qquad A \text{ tritt nicht ein} \iff \omega \notin A.$$[1]

Ω heißt **sicheres Ereignis**, $\emptyset$ heißt **unmögliches Ereignis**.

Beachte: $A \subseteq B \subseteq \Omega$ bedeutet: Wenn A eintritt, so tritt B ein.

7.1 *Beispiele für Zufallsexperimente.*

(a) Standardbeispiel: Werfen eines Würfels
Wir identifizieren die geworfenene Augenzahl mit der entsprechenden Zahl.
Ergebnisse: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Elementarereignisse: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$.
$A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$ ist das Ereignis "Es wird eine gerade Augenzahl gewürfelt".
Würfelt man $\omega_1 = 3$, so tritt A nicht ein, würfelt man $\omega_2 = 4$, so tritt A ein.

Bei allen Gegenständen, mit denen wir Zufallsexperimente durchführen, setzen wir ohne weitere Erwähnung voraus, dass sie "ideal" sind, dass also ihre physikalische Beschaffenheit das Ergebnis des Experiments nicht beeinflusst. (Ein Bleiplättchen an der Eins beim Würfeln ist verboten!)

[1] Ist ω das Ergebnis eines Zufallsexperiments, so sagt man auch: ω tritt ein.

7.21 **Geburtstagsproblem.** *Es sei vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Tag im Jahr Geburtstag zu haben, für alle* 365 *Tage des Jahres dieselbe ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Raum mit* 30 *Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?*

Hinweis: Man berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.

Ein weiteres Geburtstagsproblem findet man in [7.85].

Wir zählen die Tage des Jahres durch, z.B. erhält der 3. März die Nummer 62 (Schaltjahre werden vernachlässigt).
Die Geburtstage der 30 Personen liefern ein 30-Tupel aus den Zahlen $1, 2, \ldots, 365$.
Die Ergebnismenge Ω ist die Menge aller dieser 30-Tupel, $\Omega = \{1, 2, \ldots, 365\}^{30}$.
Nach [S. 295] ist $|\Omega| = 365^{30}$ die Anzahl der möglichen Ergebnisse. Ist A das genannte Ereignis, so ist das Gegenereignis $\overline{A}$ die Menge aller Tupel in Ω mit paarweise verschiedenen Komponenten.
Nach [S. 295] gibt es davon $365 \cdot 364 \cdots (365 - 30 + 1)$. Dies ist die Anzahl der für $\overline{A}$ günstigen Ergebnisse. Es folgt

$$P(\overline{A}) = \tfrac{365 \cdots 336}{365^{30}} \approx 0.294, \quad \text{also} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0.706 = \underline{70.6\%}.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 70.6% haben, entgegen üblichen Vorstellungen, in einem Raum mit 30 Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag.
Man rechne nach: Ab 23 Personen ist die Wahrscheinlichkeit größer als 50%.

7.22 *Ein deutsches Skatspiel hat* 32 *Karten, je vier Karten (in den roten "Farben" Karo, Herz und den schwarzen "Farben" Pik, Kreuz) der Werte* $7, 8, 9, 10, B, D, K, A$. *Die Werte* B, D, K *(Bube, Dame, König) heißen Bilder,* A *bedeutet Ass. Jeder der drei Spieler erhält* 10 *Karten, zwei Karten kommen verdeckt in den "Skat", den der Alleinspieler aufnehmen kann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Skat*

(a) *zwei Buben liegen,* (b) *genau ein Bube liegt,*
(c) *mindestens ein Bube liegt?*

Ergebnisraum sei $\Omega = \{(S_1, S_2, S_3, S) |\ (S_1, S_2, S_3, S)$ ist eine Kartenverteilung an die Spieler 1, 2 und 3 und für den Skat$\}$.
Also ist $|S_j| = 10$ $(j = 1, 2, 3)$, $|S| = 2$, und S_1, S_2, S_3, S sind paarweise disjunkt.
Mit den Formeln auf [S. 295] folgt: Für die zwei Karten im Skat S gibt es $\binom{32}{2}$ Möglichkeiten, für die 10 Karten von Spieler 1 bleiben $\binom{30}{10}$ Möglichkeiten ("Blätter"), für Spieler 2 bleiben $\binom{20}{10}$ Blätter, die zehn Karten für Spieler 3 sind dann festgelegt. Damit gibt es nach dem Abzählprinzip für Tripel

$$\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} = 2\,753\,294\,408\,504\,640$$

mögliche Ergebnisse, d.h. Elemente von Ω, siehe auch [6.24].
Beachte: Dieselbe Anzahl erhält man, wenn man mit den Möglichkeiten für Spieler 1 beginnt.

(a) Für zwei Buben im Skat gibt es $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten. Damit gibt es nach dem Abzählprinzip [S. 295] $g = \binom{4}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}$ günstige Ergebnisse.
Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Buben im Skat liegen, ist

$$\frac{g}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}}{\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{4 \cdot 3}{32 \cdot 31} = \frac{3}{248} \approx \underline{1.2\%} \quad \text{(siehe auch [7.79 (a)])}.$$

8.4 Division

Um den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$ komplexer Zahlen zu berechnen, erweitert man den Bruch so, dass der Nenner reell wird. Man benutzt dabei, dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ immer eine reelle Zahl ist.

Division in $\mathbb{C}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{1}{|z_2|^2}\, z_1 \cdot \overline{z_2}, \qquad \text{speziell} \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}.$$

Der Bruch $\frac{z_1}{z_2}$ wird mit dem konjugiert komplexen Nenner $\overline{z_2}$ erweitert.

Merke: $|z| = 1 \iff z \cdot \overline{z} = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$, speziell $\boldsymbol{\frac{1}{i} = i^{-1} = -i}$.

8.11 *Für die komplexen Zahlen* $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1 + \mathrm{i}$, $z_3 = 1 - \mathrm{i}$, $z_4 = -3 + 4\mathrm{i}$

berechne man (a) *ihre Kehrwerte* $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_3}, \frac{1}{z_4}$,

(b) *die Quotienten* $\frac{z_2}{z_3}, \frac{z_1}{z_4}, \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$,

(c) *die Summe* $\frac{1}{{z_3}^2} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3}$.

(a) $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})} = \frac{-\mathrm{i}}{1} = \underline{-\mathrm{i}}.$

Erweitern mit i ergibt ebenfalls einen reellen Nenner: $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} = \frac{\mathrm{i}}{-1} = \underline{-\mathrm{i}}.$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} = \underline{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}}.$$

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} = \frac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{2} = \underline{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}}.$$

$$\frac{1}{z_4} = \frac{1}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{-3-4\mathrm{i}}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})} = \frac{-3-4\mathrm{i}}{25} = \underline{-\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}\mathrm{i}}.$$

(b) $\frac{z_2}{z_3} = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \underline{\mathrm{i}}.$

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})} = \frac{4-3\mathrm{i}}{25} = \underline{\tfrac{4}{25} - \tfrac{3}{25}\mathrm{i}}.$$

Bei $\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$ wird vor dem Erweitern in Zähler und Nenner ausmultipliziert:

$$\frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = \frac{\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})} = \frac{1+\mathrm{i}}{-7+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})(-7-\mathrm{i})}{(-7+\mathrm{i})(-7-\mathrm{i})} = \frac{1}{50}(-6-8\mathrm{i}) = \underline{-\tfrac{3}{25} - \tfrac{4}{25}\mathrm{i}}.$$

(c)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{{z_3}^2} + \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_1 z_4}{z_2 z_3} &= \frac{z_2 + z_1 z_3^2 + z_1 z_3 z_4}{z_2 z_3^2} = \frac{(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(1-\mathrm{i})^2 + \mathrm{i}(1-\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(-2\mathrm{i}) + (1+\mathrm{i})(-3+4\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})} = \frac{3+\mathrm{i}-7+\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})} \\
&= \frac{-2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(-2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2} = \underline{-\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}}.
\end{aligned}$$

8.7 Multiplikation und Division in Exponential- bzw. Polardarstellung

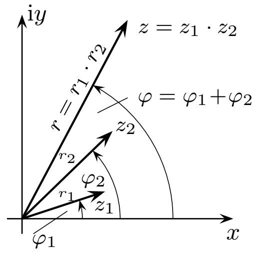
Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen ist sehr anschaulich, wenn man die Exponentialdarstellung bzw. die Polardarstellung benutzt.

Multiplikation komplexer Zahlen

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1} \cdot r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2} = r_1 r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) \end{aligned}$$

Bei der **Multiplikation** komplexer Zahlen werden die Beträge *multipliziert* und die Winkel *addiert*.

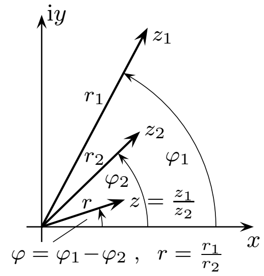


Division komplexer Zahlen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}}{r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)} \quad \text{bzw.}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1+\mathrm{i}\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+\mathrm{i}\sin\varphi_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big) \end{aligned}$$

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden die Beträge *dividiert* und die Winkel *subtrahiert*.

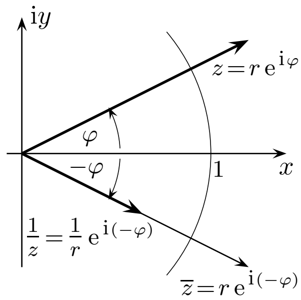


Kehrwertbildung komplexer Zahlen

Ist $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\varphi)} = \frac{1}{r}\big(\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)\big) \\ &= \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi) = \frac{1}{r^2}\big(r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)\big) = \frac{1}{r^2}\,\overline{z} \end{aligned}$$

$$\boxed{|z| = 1 \iff r = 1 \iff \frac{1}{z} = \overline{z}}$$



8.17 *Man berechne jeweils das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$:*

(a) $z_1 = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$, $z_2 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}$, (b) $z_1 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)}$, $z_2 = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$.

Wir rechnen exponentiell und geben die Ergebnisse auch kartesisch an.
In (b) verwenden wir $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+2\pi)}$.

(a) $z_1 z_2 = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3} \cdot 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6} = 18\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3+\pi/6)} = \underline{18\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}} = 18(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}) = \underline{18\mathrm{i}}.$

$\frac{z_1}{z_2} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi/3-\pi/6)} = \underline{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/6}} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}) = \underline{\sqrt{3} + \mathrm{i}}.$

(b) $z_1 z_2 = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)} \cdot 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4} = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+\pi/4)} = 6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-3\pi/4)} = \underline{6\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/4}} = \underline{3\sqrt{2}\,(-1-\mathrm{i})}.$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi)}}{3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi-\pi/4)} = \frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-5\pi/4)} = \underline{\frac{2}{3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}} = \underline{-\frac{1}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\mathrm{i}}.$