3 Differenzieren und Integrieren in $\mathbb{C}$

3.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Die Differenzierbarkeit komplexer Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man mit Hilfe des Differenzenquotienten, der linearen Approximierbarkeit und der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen definieren.

Um sie von der reellen Differenzierbarkeit von Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zu unterscheiden, spricht man auch oft von *komplexer Differenzierbarkeit*. Zum Vergleich mit der reellen Differenzierbarkeit siehe Abschnitt 3.1.1.

Definition mit Hilfe des Differenzenquotienten:
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. f heißt *(komplex) differenzierbar* in z_0, wenn der Grenzwert $L := \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert.
In diesem Fall heißt L die *Ableitung* von f im Punkt z_0 . Schreibweise:

$$f'(z_0) \;=\; \frac{df}{dz}(z_0) \;=\; \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0} \;=\; \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\;. \tag{1}$$

Funktionen sind genau dann differenzierbar, wenn sie linear approximierbar sind. Dabei heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ bei $z_0 \in D$ *komplex linear approximierbar*, wenn es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt derart, daß $f(z)$ durch die lineare Funktion $A(z) = f(z_0) + a(z - z_0)$ von höherer als erster Ordnung angenähert wird, bzw derart, daß

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - A(z)}{z - z_0} \;=\; \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - \big[f(z_0) + a(z - z_0)\big]}{z - z_0} \;=\; 0\;. \tag{2}$$

Definition mit Hilfe der linearen Approximierbarkeit:
Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn sie dort komplex linear approximierbar ist.
In diesem Fall ist $\{z \mapsto f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}$ ihre komplex lineare Näherung.

Zur Definition mit Hilfe der Cauchy-Riemann-Dgln siehe Abschnitt 3.1.1.

Wichtiger als die Differenzierbarkeit in einem Punkt ist die Differenzierbarkeit auf offenen Mengen. Funktionen, die auf einer offenen Mengen komplex differenzierbar sind, heißen *holomorph*. Sie bilden das eigentliche Thema der Funktionentheorie. Siehe dazu Kapitel 4.

Beispiele

1) Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzbereichs komplex differenzierbar, also holomorph. Insbesondere sind Polynome in ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

2) Rationale Funktionen sind in ihrem Definitionsbereich, also überall außer in den Nullstellen des Nenners holomorph.
3) Die Konjugierung $\{z \mapsto \overline{z}\}$ ist in $\mathbb{C}$ nirgends komplex differenzierbar, also auch nirgends holomorph. Sie ist in ganz $\mathbb{C}$ antiholomorph.

   Die entsprechende Funktion $\{(x,y) \mapsto (x,-y)\}$ ist als lineare Funktion vom $\mathbb{R}^2$ auf den $\mathbb{R}^2$ überall beliebig oft (reell) differenzierbar.
4) $f := \{z \mapsto z \cdot \overline{z} = |z|^2\}$ ist außer im Ursprung $z_0 = 0$ nirgends komplex differenzierbar. Im Punkt $z_0 = 0$ ist sie komplex differenzierbar mit der Ableitung $f'(0) = 0$. f ist nirgends holomorph.

   Die entsprechende reelle Funktion von zwei Variablen $\{(x,y) \mapsto x^2 + y^2\}$ ist überall im $\mathbb{R}^2$ (reell) differenzierbar.

Weitere Beispiele in den Aufgaben (Abschnitt 8.7).

3.1.1 Vergleich mit der reellen Differenzierbarkeit

Zur (totalen und partiellen) Differenzierbarkeit vektor- oder reellwertiger Funktionen mehrerer reeller Variabler siehe z.B. [RA2 7.1.2].

Sei weiterhin $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Sei $f = u + iv$ wie üblich die Zerlegung von f in Real- und Imaginärteil. Man kann D als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auffassen und f bzw u und v als vektor- bzw reellwertige Funktionen von zwei reellen Variablen interpretieren.

$$f = u + iv : z = x + iy \mapsto u(z) + iv(z) \quad \leftrightarrows \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} .$$

Bei dieser Interpretation entsprechen die komplex linearen Abbildungen von $\mathbb{C}$ den Drehstreckungen des $\mathbb{R}^2$

$$z \mapsto a \cdot z = (\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) \quad \leftrightarrows \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \tag{3}$$

und die komplexe Differenzierbarkeit kann man wie folgt beschreiben:

Komplexe Differenzierbarkeit:
$f\colon D \to \mathbb{C}$ ist in $z_0 = (x_0, y_0)$ *komplex differenzierbar*, wenn f dort komplex linear approximierbar ist, also wenn es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec{f}(x,y)$ bei (x_0, y_0) durch die affine Abbildung $\vec{f}(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ von höherer als erster Ordnung angenähert wird. In diesem Fall ist $\alpha + i\beta = f'(z_0)$.

Zum Vergleich die

Reelle Differenzierbarkeit:
$\vec{f}: D \to \mathbb{R}^2$ ist in $z_0 = (x_0, y_0)$ *(total) reell differenzierbar*, wenn $\vec{f}$ bei z_0 reell linear approximierbar ist.
Dies ist genau dann der Fall, wenn es $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec{f}(x, y)$ bei (x_0, y_0) durch die affine Abbildung $\vec{f}(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$ von höherer als erster Ordnung angenähert wird.

Ist $\vec{f} = (u, v)$ in z_0 reell differenzierbar, so sind die Koordinatenfunktionen u, v in z_0 nach x und y partiell differenzierbar und die Matrix der eindeutig bestimmten linearen Approximierenden von $\vec{f}$ ist die Funktionalmatrix $J_{\vec{f}}(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$ von $\vec{f}$ in $z_0 = (x_0, y_0)$. Durch Vergleich folgt:

Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen:
$f = u + iv$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ genau dann komplex differenzierbar, wenn $\vec{f} = (u, v)$ in $z_0 = (x_0, y_0)$ (total) reell differenzierbar ist und die *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*

$$u_x(z_0) \;=\; v_y(z_0) \qquad \text{und} \qquad u_y(z_0) \;=\; -v_x(z_0) \tag{4}$$

erfüllt. In diesem Fall gilt (jeweils an der Stelle z_0) :

$$f' \;=\; f_x \;=\; u_x + iv_x \;=\; v_y - iu_y \;=\; -if_y \ . \tag{5}$$

Zur Herleitung der Cauchy-Riemann-Dgln siehe auch Aufgabe 8.7.D.

Im Wirtinger-Kalkül (siehe 3.1.3) reduzieren sich die Cauchy-Riemann-Dgln auf eine Gleichung nämlich $f_{\overline{z}} = 0$.

Die Cauchy-Riemann-Dgln (4) besagen u.a., daß die Gradienten (u_x, u_y) bzw (v_x, v_y) senkrecht aufeinander stehen. Andererseits stehen sie senkrecht auf den Niveaulinien von u bzw v. Erfüllt also $f = u + iv$ die Cauchy-Riemann-Dgln, so bilden die Niveaulinien von u und v orthogonale Kurvenscharen.

Gelten die Cauchy-Riemann-Dgln (4) in D, so folgt außerdem

$$\operatorname{div}(u, -v) = u_x - v_y \equiv 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}(u, -v) = u_y + v_x \equiv 0 \ , \tag{6}$$

d.h., das Vektorfeld $(u, -v) = \overline{f}$ ist in D quellen- und wirbelfrei.

Sind u, v in einer Umgebung von z_0 zweimal stetig partiell differenzierbar, so folgt aus den Cauchy-Riemann-Dgln und dem Satz von H.A.Schwarz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen [RA2 7.2.1]

$$u_{xx} + u_{yy} \;=\; (v_y)_x + (-v_x)_y \;= v_{yx} - v_{xy} \;=\; 0 \ , \tag{7}$$

d.h. u und v sind *harmonisch*. Zu harmonischen Funktionen siehe 4.6.

3.1.2 Einfache Eigenschaften und Rechenregeln

Komplex differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann man als spezielle reell differenzierbare Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen. Deshalb übertragen sich viele Eigenschaften und Rechenregeln aus der reellen Analysis.

Seien weiterhin $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und f, g zwei Funktionen von D nach $\mathbb{C}$.

1) Ist f in z_0 differenzierbar, so ist f in z_0 stetig, aber nicht umgekehrt.

   Z.B. ist $f(z) := |z|$ in $z_0 := 0$ stetig, aber nicht differenzierbar.

2) *Linearität der Ableitung:*

   Sind f und g in z_0 differenzierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so ist auch $\lambda f + \mu g$ in z_0 differenzierbar und zwar ist $(\lambda f + \mu g)'(z_0) = \lambda f'(z_0) + \mu g'(z_0)$.

   Insbesondere bilden die auf einer offenen Menge D holomorphen Funktionen einen $\mathbb{C}-$Vektorraum und für jedes $z_0 \in D$ ist $\{f \mapsto f'(z_0)\}$ ist eine lineare Abbildung dieses Vektorraums in den Grundkörper $\mathbb{C}$.

3) *Produktregel:*

   Mit f und g ist auch fg in z_0 komplex differenzierbar und zwar ist

$$(fg)'(z_0) \;=\; (f'g + fg')(z_0) \;=\; f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \;. \tag{8}$$

4) *Quotientenregel:*

   Sind f und g in z_0 komplex differenzierbar und ist $g(z_0) \neq 0$, so sind auch $\frac{f}{g}$ und $\frac{1}{g}$ in z_0 komplex differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'g - fg'}{g^2}\,(z_0) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(z_0) = -\frac{g'}{g^2}\,(z_0) \;. \tag{9}$$

5) *Kettenregel:*

   Seien $V \subset \mathbb{C}$ offen, $g\colon D \to V$, $h\colon V \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und $g(z_0) = w_0 \in V$. Ist g in z_0 und h in w_0 komplex differenzierbar, so ist auch $f := h \circ g$ in z_0 komplex differenzierbar und zwar mit der Ableitung

$$(h \circ g)'(z_0) \;=\; h'(g(z_0))\, g'(z_0) \;. \tag{10}$$

   Entsprechende Formeln für mehrfache Verkettungen gelten wie im Reellen (siehe [RA1 4.1.3]). Die Kurzform $(h \circ g)' = h'g'$ stimmt natürlich nur, wenn man in die Funktionen die richtigen Argumente einsetzt.

Über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion gilt ein analoger Satz wie in der reellen Analysis. Wichtiger ist der Satz 4.2.10 über die Holomorphie der Umkehrfunktion (Abschnitt 4.2).

3.1.3 Wirtinger Kalkül

Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f = u + iv$ die Zerlegung einer auf D definierten komplexwertigen Funktion in ihren Real- und Imaginärteil.

f ist genau dann in z_0 total reell differenzierbar, wenn es komplexe Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ gibt derart, daß f durch $T(z) := f(z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0)$ linear approximiert wird (siehe Abschnitt 3.1.1). In diesem Fall ist $a = u_x + iv_x$ und $b = u_y + iv_y$ jeweils an der Stelle z_0.

Man kann die lineare Näherung auch in der Form

$$T(z) - f(z_0) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = c(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z_0}) \tag{11}$$

schreiben (siehe Aufgabe 8.1.D.4). Dabei ist

$$\begin{aligned} c &= \tfrac{1}{2}[(u_x + v_y) - i(u_y - v_x)] = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad \text{und} \\ d &= \tfrac{1}{2}[(u_x - v_y) + i(u_y + v_x)] = \frac{1}{2}(f_x + if_y) \end{aligned} \tag{12}$$

jeweils an der Stelle z_0. Die *Wirtinger-Operatoren* ∂ und $\overline{\partial}$ definiert man durch

$$\partial f := \tfrac{\partial f}{\partial z} := f_z := \tfrac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) \;\; ; \quad \overline{\partial} f := \tfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} := f_{\overline{z}} := \frac{1}{2}\left(f_x + if_y\right) \tag{13}$$

Damit ergibt sich

> *Satz:*
> $f = u + iv$ ist in z_0 genau dann reell differenzierbar, wenn es $c, d \in \mathbb{C}$ gibt derart, daß f durch $T(z) := f(z_0) + c(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z_0})$ linear approximiert wird, also derart, daß $\displaystyle\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - T(z)}{|z - z_0|} = 0$.
> In diesem Fall sind u und v in z_0 partiell differenzierbar und es ist $c = f_z(z_0)$ und $d = f_{\overline{z}}(z_0)$.

U.a. gelten die folgenden Umrechnungsformeln

$$\begin{array}{lll} u_x = \frac{1}{2}\left(f_x + \overline{f}_x\right) & v_x = \frac{1}{2i}\left(f_x - \overline{f}_x\right) & f_x = f_z + f_{\overline{z}} \\ u_y = \frac{1}{2}\left(f_y + \overline{f}_y\right) & v_y = \frac{1}{2i}\left(f_y - \overline{f}_y\right) & f_y = i\left(f_z - f_{\overline{z}}\right) \end{array} \tag{14}$$

Für die Wirtinger-Operatoren ∂ und $\overline{\partial}$ sowie hinreichend oft differenzierbare Funktionen f und g gelten die folgenden Regeln:

1. *Linearität:*

   ∂ und $\overline{\partial}$ sind $\mathbb{C}$-lineare Operatoren, d.h. für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\partial(af + bg) = a\,\partial f + b\,\partial g \qquad \overline{\partial}(af + bg) = a\,\overline{\partial} f + b\,\overline{\partial} g \tag{15}$$

2. *Produktregel:*

$$\partial(f \cdot g) = (\partial f)g + f(\partial g) \qquad \overline{\partial}(f \cdot g) = (\overline{\partial} f)g + f(\overline{\partial} g) \tag{16}$$

   Infolgedessen gilt für ∂ und $\overline{\partial}$ auch die Leibnizsche Regel [RA1 4.1.3.f] für höhere Ableitungen von Produkten fg.

3. $\overline{\partial} f = \overline{\partial \overline{f}}$, $\quad \overline{\partial f} = \overline{\partial}\,\overline{f}$

   Für reellwertiges f gilt insbesondere $\overline{\partial f} = \overline{\partial} f$.

4. $\partial z = 1$, $\overline{\partial} z = 0$, $\partial \overline{z} = 0$, $\overline{\partial}\overline{z} = 1$

5. *Laplace-Operator:*

$$\overline{\partial}\partial f \;=\; f_{z\overline{z}} \;=\; \tfrac{1}{4}\left(f_{xx} + f_{yy}\right) \;=\; \tfrac{1}{4}\Delta f \tag{17}$$

6. *Kettenregeln:*

$$\partial(f \circ g) \;=\; \partial f\, \partial g + \overline{\partial} f\, \partial \overline{g}\;; \quad \overline{\partial}(f \circ g) \;=\; \partial f\, \overline{\partial} g + \overline{\partial} f\, \partial \overline{g} \tag{18}$$

   wobei die Ableitungen jeweils an den entsprechenden Stellen auszuwerten sind.

7. *Cauchy-Riemann-Dgln:*

$$\overline{\partial} f = f_{\overline{z}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x \tag{19}$$