8.7 Komplexe Differenzierbarkeit

$\boxed{\text{A}}$ Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f\colon D \to \mathbb{C}$. Dann ist f genau dann (komplex) differenzierbar in z_0, wenn es eine in z_0 stetige Funktion $f_1\colon D \to \mathbb{C}$ gibt derart, daß

$$f(z) \;=\; f(z_0) + (z - z_0) f_1(z) \quad \text{für alle } z \in D \; . \tag{1}$$

In diesem Fall ist die Ableitung von f in z_0 gerade $f'(z_0) \;=\; f_1(z_0)$.

$\boxed{\text{B}}$ Zeigen Sie, daß die komplexe Konjugierung $f(z) := \overline{z}$ in $\mathbb{C}$ nirgends komplex differenzierbar ist.

$\boxed{\text{C}}$ Welche der folgenden Funktionen sind wo komplex differenzierbar bzw holomorph:

1) $f(x+iy) := xy + \frac{i}{2}\,(y^2 - x^2 + 20)$ 2) $f(x+iy) := \mathrm{e}^y - i\,\mathrm{e}^x$

3) $f(x+iy) := ax + iby \quad (a, b \in \mathbb{C})$ 4) $f(z) := z\,\mathsf{Re}\,z$

$\boxed{\text{D}}$ Sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ in einer Umgebung von $\zeta \in \mathbb{C}$ definiert.

1) Ist f in ζ komplex differenzierbar, so erfüllen u, v in ζ die Cauchy-Riemann Dgln.

2) Sind u, v in einer Umgebung von ζ stetig partiell differenzierbar und erfüllen sie in ζ die Cauchy-Riemann-Dgln, so ist f in ζ komplex differenzierbar.

$\boxed{\text{E}}$ Seien $z = x + iy = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ und $w = f(z) = u + iv = R\,\mathrm{e}^{i\Phi}$.
Formulieren und beweisen Sie die Cauchy-Riemann Dgln für

1) $u(r,\varphi),\ v(r,\varphi)$

2) $R(x,y),\ \Phi(x,y)$

3) $R(r,\varphi),\ \Phi(r,\varphi)$

$\boxed{\text{F}}$ 1) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, daß $|f| = \mathit{const} \iff f = \mathit{const}$.

2) Sei $A := \{\, z \,;\, r < |z| < R \,\}$ ein Kreisring und $f\colon A \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner sei $|f| = \mathit{const}$ auf Kreisen $\{|z| = \mathit{const}\}$.
Zeigen Sie, daß dann f von der Form $f(z) = az^n$ mit $n \in \mathbb{Z},\ a \in \mathbb{C}$ ist.

$\boxed{\text{G}}$ Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $S \subset D$ eine diskrete Punktmenge in D. Ist f in D stetig und in $D \setminus S$ holomorph, so ist f in ganz D holomorph.

$\boxed{\text{H}}$ Sei f holomorph in dem offenen Bereich $D \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß die durch $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ definierte Funktion f^* im Gebiet $D^* := \{\, z \,;\, \overline{z} \in D \,\}$ holomorph ist.

$\boxed{\text{I}}$ Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in G$ und $f\colon G \to \mathbb{C}$ stetig partiell differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist in 0 komplex differenzierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|=r} f(z)\; dz \;=\; 0\;.$$

$\boxed{\text{J}}$ *Satz über die Holomorphie der Umkehrfunktion:*

Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in D$ und $f'(z_0) \neq 0$.

Dann existieren offene Umgebungen $U \subset D$ von z_0 und V von $f(z_0)$ derart, daß $f(U) = V$ und $f|_U$ injektiv ist.

Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$ von $f|_U$ ist in V holomorph und es gilt

$$(f^{-1})'(w) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \qquad \text{für alle } \; w \in V\;. \tag{2}$$

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ "$\Longrightarrow$": Sei zunächst f in z_0 differenzierbar. Also existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$. Sei $f_1\colon D \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_1(z) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{für } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{für } z = z_0 \end{cases}\;. \tag{3}$$

Dann ist f_1 in z_0 stetig und es gilt

$$f(z) \;=\; f(z_0) + (z-z_0)f_1(z) \quad \text{für alle } z \in D\;. \tag{4}$$

"$\Longleftarrow$": Sei nun $f_1\colon D \to \mathbb{C}$ in $z_0 \in D$ stetig und es gelte (4). Dann existiert der Grenzwert

$$f_1(z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0} f_1(z) \;=\; \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\;. \tag{5}$$

Also ist f in z_0 komplex differenzierbar und es ist $f'(z_0) = f_1(z_0)$.

$\boxed{\text{B}}$ Sei $f(z) := \overline{z}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig.

<u>Beh.:</u> f ist in z_0 nicht komplex differenzierbar.

Dafür reicht zu zeigen, daß der Grenzwert $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ nicht existiert.

Für $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$ strebt $z(t) := z_0 + t$ gegen z_0 parallel zur reellen Achse. Für diese Annäherung gilt

$$\frac{f(z(t))-f(z_0)}{z(t)-z_0} \;=\; \frac{\overline{z_0+t}-\overline{z_0}}{z_0+t-z_0} \;=\; \frac{t}{t} \;=\; 1 \to 1\;. \tag{6}$$

Für $t \to 0$, $t \in \mathbb{R}$ strebt $z(t) := z_0 + ti$ gegen z_0 parallel zur imaginären Achse. Für diese Annäherung gilt

$$\frac{f(z(t)) - f(z_0)}{z(t) - z_0} \;=\; \frac{\overline{z_0 + it} - \overline{z_0}}{z_0 + it - z_0} \;=\; \frac{-it}{it} \;=\; -1 \to -1 \; . \tag{7}$$

Da sich bei zwei verschiedenen Annäherungen an z_0 verschiedene Grenzwerte ergeben, hat der Differenzenquotient für $z \to z_0$ keinen Grenzwert. Fertig!

$\boxed{\text{C}}$ **(C.1)** Es ist

$$f(x+iy) \;:=\; xy + \tfrac{i}{2}\,(y^2 - x^2 + 20) \;=\; -\tfrac{i}{2}\,z^2 + 10i \; . \tag{8}$$

Als Polynom ist $f(z)$ in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und holomorph.

(C.2) Für $f(x+iy) := \mathrm{e}^y - i\,\mathrm{e}^x = u(x,y) + iv(x,y)$ ist $u_x \equiv 0 \equiv v_y$. Aber

$$u_y(x,y) \;=\; \mathrm{e}^y \;= -v_x(x,y) \;=\; \mathrm{e}^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \; . \tag{9}$$

Also ist f auf der 'Winkelhalbierenden' $y = x$ komplex differenzierbar. f ist nirgends holomorph, da f auf keiner *offenen* Menge komplex differenzierbar ist.

(C.3) Es ist $f(z) := ax + iby = (x\,\mathsf{Re}\,a - y\,\mathsf{Im}\,b) + i(x\,\mathsf{Im}\,a + y\,\mathsf{Re}\,b)$. Also

$$u_x = v_y \; , \; u_y = -v_x \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{Re}\,a = \mathsf{Re}\,b \; , \; \mathsf{Im}\,b = \mathsf{Im}\,a \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \; .$$

Also ist f für $a = b$ in ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar und holomorph. Für $a \neq b$ ist f in keinem Punkt komplex differenzierbar und damit nirgends holomorph.

(C.4) $f(z) = u + iv = z\,\mathsf{Re}\,z = x^2 + ixy$ ist in ganz $\mathbb{C}$ definiert. Als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist sie beliebig oft stetig partiell differenzierbar, also auch beliebig oft total differenzierbar. Es ist

$$u_x = 2x = v_y = x \iff x = 0 \quad \text{und} \quad u_y = 0 = -v_x = -y \iff y = 0 \; .$$

Also ist f nur im Nullpunkt komplex differenzierbar und nirgends holomorph.

Im Wirtinger-Kalkül kann man so schließen:
Es ist $f(z) = z\mathsf{Re}\,z = z(z + \overline{z})/2$ und daher

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \;=\; \frac{z}{2} \;=\; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z \;=\; 0 \; . \tag{10}$$

Also ist f nur im Nullpunkt komplex differenzierbar.

$\boxed{\text{D}}$ **(D.1)** Sei f in $\zeta = \xi + i\eta$ komplex differenzierbar. Dann existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z \to \zeta} \dfrac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$. Insbesondere gilt für reelles $t \to 0$:

$$L_1 \;:=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(\zeta + t) - f(\zeta)}{\zeta + t - \zeta} \;=\; \lim_{t \to 0} \frac{f(\zeta + it) - f(\zeta)}{\zeta + it - \zeta} \;=\; L_2 \; . \tag{11}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{t\to 0} \frac{u(\xi+t,\eta)+iv(\xi+t,\eta)-u(\xi,\eta)-iv(\xi,\eta)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u(\xi+t,\eta)-u(\xi,\eta)}{t} + i \lim_{t\to 0} \frac{v(\xi+t,\eta)-v(\xi,\eta)}{t} \\
L_2 &= \lim_{t\to 0} \frac{u(\xi,\eta+t)+iv(\xi,\eta+t)-u(\xi,\eta)-iv(\xi,\eta)}{it} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{v(\xi,\eta+t)-v(\xi,\eta)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{u(\xi,\eta+t)-u(\xi,\eta)}{it}
\end{aligned} \tag{12}$$

Also gilt $L_1 = L_2$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{u(\xi+t,\eta)-u(\xi,\eta)}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{v(\xi,\eta+t)-v(\xi,\eta)}{t} \qquad \text{und} \\
\lim_{t\to 0} \frac{v(\xi+t,\eta)-v(\xi,\eta)}{t} &= -\lim_{t\to 0} \frac{u(\xi,\eta+t)-u(\xi,\eta)}{t}
\end{aligned} \tag{13}$$

also genau dann, wenn

$$u_x(\xi,\eta) = v_y(\xi,\eta) \qquad \text{und} \qquad v_x(\xi,\eta) = -u_y(\xi,\eta) \ . \tag{14}$$

(D.2) Sei $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ in einer ganzen Umgebung U von $\zeta = \xi+i\eta$ stetig partiell nach x und y differenzierbar und die Cauchy-Riemann-Dgln seien in ζ erfüllt. Dann ist f in ζ total reell differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}
f(z) &= \big[u(\xi,\eta)+u_x(\xi,\eta)(x-\xi)+u_y(\xi,\eta)(y-\eta)+r_1(z)\big] \\
&\qquad +i\big[v(\xi,\eta)+v_x(\xi,\eta)(x-\xi)+v_y(\xi,\eta)(y-\eta)+r_2(z)\big] \\
&= \big[u(\xi,\eta)+iv(\xi,\eta)\big]+\big[u_x(\xi,\eta)(x-\xi)-v_x(\xi,\eta)(y-\eta)+r_1(z)\big] \\
&\qquad +i\big[v_x(\xi,\eta)(x-\xi)+u_x(\xi,\eta)(y-\eta)+r_2(z)\big] \\
&= f(\zeta)+\big[u_x(\xi,\eta)+iv_x(\xi,\eta)\big]\big[(x-\xi)+i(y-\eta)\big]+\big[r_1(z)+ir_2(z)\big] \\
&= f(\zeta)+f_x(\zeta)(z-\zeta)+r_3(z) \ .
\end{aligned}$$

Dabei gilt für die 'Restterme' $r_1(z)$, $r_2(z)$ und $r_3 = r_1 + ir_2$, daß sie für $z \to \zeta$ von höherer als erster Ordnung gegen Null gehen, d.h. daß $\displaystyle\lim_{z\to\zeta} \frac{r_j(z)}{z-\zeta} = 0$.

Dann ist aber $f(z)$ bei ζ komplex linear approximierbar, also komplex differenzierbar. Und zwar ist $f'(\zeta) = f_x(\zeta)$. Fertig!

$\boxed{\text{E}}$ **(E.1)** Mit $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$ folgt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\varphi)} &= \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \\ \begin{pmatrix} u_r & u_\varphi \\ v_r & v_\varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi & r(-u_x\sin\varphi + u_y\cos\varphi) \\ v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi & r(v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und daraus wiederum:

$$u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x \quad \Longleftrightarrow \quad ru_r = v_\varphi\ , u_\varphi = -rv_r\ . \tag{15}$$

"$\Longrightarrow$": folgt sofort durch Einsetzen.

"$\Longleftarrow$": Zunächst folgt

$$\begin{aligned} u_x\cos\varphi + u_y\sin\varphi &= v_y\cos\varphi - v_x\sin\varphi \qquad \text{und} \\ u_x\sin\varphi - u_y\cos\varphi &= v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \end{aligned} \tag{16}$$

Multiplikation der 1. Gleichung mit $\cos\varphi$, der 2. Gleichung mit $\sin\varphi$ und anschließende Addition der beiden Gleichungen liefert $u_x = v_y$. Multiplikation der 1. Gleichung mit $\sin\varphi$, der 2. Gleichung mit $\cos\varphi$ und anschließende Subtraktion ergibt $u_y = -v_x$.

(E.2) Sei $f(z) = u + iv = R\,\mathrm{e}^{i\Phi}$. Wie in **(E.1)** folgt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= \frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\Phi)} \cdot \frac{\partial(R,\Phi)}{\partial(x,y)} \\ \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\Phi & -R\sin\Phi \\ \sin\Phi & R\cos\Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_x & R_y \\ \Phi_x & \Phi_y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_x\cos\Phi - R\Phi_x\sin\Phi & R_y\cos\Phi - R\Phi_y\sin\Phi \\ R_x\sin\Phi + R\Phi_x\cos\Phi & R_y\sin\Phi + R\Phi_y\cos\Phi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

Man erhält mit analoger Rechnung wie in **(E.1)**

$$u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x \quad \Longleftrightarrow \quad R_x = R\Phi_y\ ,\ R_y = -R\Phi_x\ . \tag{18}$$

(E.3) Analog wie bei den letzten beiden Teilaufgaben erhält man

$$u_x = v_y\ ,\ u_y = -v_x \quad \Longleftrightarrow \quad rR_r = R\Phi_\varphi\ ,\ R_\varphi = -rR\Phi_r\ . \tag{19}$$

$\boxed{\text{F}}$ **(F.1)** Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Die Richtung "$f = const \Longrightarrow |f| \equiv const$" ist trivial.

Ist $f = R\,\mathrm{e}^{i\Phi}$ und $|f| = R \equiv const$, so ist $R_x = R_y \equiv 0$ in G. Nach Aufgabe 8.7.E.2 ist dann auch $\Phi_x = \Phi_y \equiv 0$ in G. G ist ein Gebiet, also $f \equiv const$.

Die nicht-triviale Richtung folgt auch aus dem Satz von der Gebietstreue, bzw daraus, daß nicht-konstante holomorphe Funktionen offene Mengen auf offene Mengen abbilden. $|f| \equiv const$ bedeutet ja, daß das Bild $f(G)$ auf einer Kreislinie liegt, also nicht offen in $\mathbb{C}$ sein kann.

(F.2) Ist $|f|$ auf Kreisen $|z| = const$ im Kreisring A konstant, so ist f von der Form $f(\varrho\,\mathrm{e}^{i\varphi}) = g(\varrho)\,\mathrm{e}^{ih(\varphi)}$ mit reellen Funktionen g und h. Die Cauchy-Riemann-Dgln und Aufgabe 8.7.E.3 liefern

$$\varrho g'(\varrho) \;=\; g(\varrho)h'(\varphi)\;, \quad \text{also} \quad h'(\varphi) \;=\; c \;=\; \frac{\varrho g'(\varrho)}{g(\varrho)} \tag{20}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt weiter

$$h(\varphi) = c\varphi + d\;;\; g(\varrho) = \alpha\varrho^c\;;\; f(z) = \alpha\varrho^c\,\mathrm{e}^{i(c\varphi+d)} = (\alpha\,\mathrm{e}^{id})\cdot z^c\;. \tag{21}$$

Da f im Kreisring A stetig ist, muß $c \in \mathbb{Z}$ sein. Fertig!

$\boxed{\text{G}}$ Sei $z_0 \in S \subset D \subset \mathbb{C}$ und $U = B_r(z_0) \subset D$ so klein, daß außer z_0 kein weiterer Punkt aus S in der Kreisscheibe U liegt. Nach Goursat verschwindet dann das Integral $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$ für jedes in U gelegene abgeschlossene Dreieck Δ. Dann besitzt f eine Stammfunktion in U und ist infolgedessen holomorph in U und damit auch komplex differenzierbar in z_0. Da $z_0 \in S$ beliebig war, ist f in ganz D holomorph.

Dies Resultat gilt auch noch für allgemeinere Ausnahmemengen S. Z.B. kann S eine Gerade sein. Für eine Beweisidee siehe z.B. Aufgabe 10.1.G.

$\boxed{\text{H}}$ Die komplexe Konjugierung $\{z \mapsto \overline{z}\}$ ist ein Homöomorphismus der Ebene $\mathbb{C}$ auf sich. Daher ist mit $D \subset \mathbb{C}$ auch $D^* := \{\, z\,;\, \overline{z} \in D \,\}$ offen.

f^* ist holomorph in D^* , wenn es in jedem $z_0^* \in D^*$ komplex differenzierbar ist. Sei also $z_0^* \in D^*$. Dann existiert der Grenzwert

$$\begin{aligned} f^{*\prime}(z_0^*) \;&=\; \lim_{z^* \to z_0^*,\, z^* \in D^*} \frac{f^*(z^*) - f(z_0^*)}{z^* - z_0^*} \;=\; \lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{\overline{z} - \overline{z_0}} \\ &=\; \overline{\lim_{z \to z_0,\, z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \;=\; \overline{f'(z_0)}\;. \end{aligned} \tag{22}$$

Also ist f^* in z_0^* komplex differenzierbar mit der Ableitung $f^{*\prime}(z_0^*) = \overline{f'(z_0)}$.

$\boxed{\mathrm{I}}$ "$\Longrightarrow$": Sei f bei $z_0 = 0$ komplex differenzierbar. Dann kann f bei 0 komplex linear approximiert werden, besitzt also eine Darstellung der Form

$$f(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) \;=\; f(0) + f'(0) r\,\mathrm{e}^{i\varphi} + g(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) \quad \text{mit} \quad \frac{g(r\,\mathrm{e}^{i\varphi})}{r} \to 0 \;\text{ für } r \to 0 \;.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|=r} f(z)\,dz \;&=\; \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) i r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi \\ &=\; \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \left[f(0) + f'(0) r\,\mathrm{e}^{i\varphi} + g(r\,\mathrm{e}^{i\varphi}) \right] i r\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi \\ &=\; 0 + 0 + \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\varphi} \frac{g(r\,\mathrm{e}^{i\varphi})}{r}\,d\varphi \;\to\; 0 \quad \text{für } r \to 0 \;. \end{aligned} \tag{23}$$

"$\Longleftarrow$": Nach Voraussetzung sind u und v stetig partiell, also auch reell total differenzierbar. Also gilt

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; u(z) + i v(z) \\ &=\; \left[u(0) + u_x(0) x + u_y(0) y + g_1(z) \right] + i \left[v(0) + v_x(0) x + v_y(0) y + g_2(z) \right] \end{aligned}$$

mit $\dfrac{g_j(z)}{|z|} \to 0$ für $z \to 0$. Damit wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi r^2} \int_{|z|=r} f(z)\,dz \;&=\; \frac{1}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} i r\,\mathrm{e}^{i\varphi} \left[u(0) + i v(0) + r\cos\varphi \left(u_x(0) + i v_x(0) \right) + \right. \\ &\qquad \left. + r \sin\varphi \left(u_y(0) + i v_y(0) \right) + g_1(z) + i g_2(z) \right] \, d\varphi \\ &=\; \frac{i}{\pi} \left[f_x(0) \int_0^{2\pi} \cos\varphi\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi + f_y(0) \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,\mathrm{e}^{i\varphi}\,d\varphi \right] \\ &\qquad + \frac{i}{\pi r} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\varphi} \left(g_1(z) + i g_2(z) \right) \, d\varphi \\ &=\; \frac{i}{\pi} \left[\pi f_x(0) + i\pi f_y(0) \right] + \frac{i}{\pi r} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i\varphi} \left(g_1(z) + i g_2(z) \right) \, d\varphi \\ &\to\; i f_x(0) - f_y(0) \quad \text{für } r \to 0 \;. \end{aligned} \tag{24}$$

Aber nach Voraussetzung geht das Integral gegen 0 für $r \to 0$. Es folgt

$$0 \;=\; i f_x(0) - f_y(0) \;=\; -v_x(0) - u_y(0) + i \left(u_x(0) - v_y(0) \right) \;. \tag{25}$$

Also erfüllt f in 0 die Cauchy-Riemann-Dgln $u_x = v_y$ und $u_y = -v_x$. Da f nach Voraussetzung in einer Umgebung von 0 stetig partiell differenzierbar ist, ist f in 0 komplex differenzierbar (siehe 8.7.D).

$\boxed{\mathrm{J}}$ Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in D$ und $f = u + iv\colon D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei ferner $f'(z_0) = f_x(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) \neq 0$. Aus den Cauchy-Riemann-Dgln folgt:

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}_{(z_0)} \;=\; u_x^2(z_0) + v_x^2(z_0) \;\neq\; 0\;. \tag{26}$$

$f = (u, v)$ ist stetig partiell nach x und y differenzierbar. Sei $w := f(z)$ und $w_0 := f(z_0)$. Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit gibt es offene Umgebungen $U = U(z_0) \subset \mathbb{C}$ und $V = V(w_0) \subset \mathbb{C}$ derart, daß $f\colon U \to V$ bijektiv ist. Die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon V \to U$ ist ebenfalls stetig differenzierbar und zwar mit der Funktionalmatrix $J_{f^{-1}}(w) = \big(J_f(z)\big)^{-1}$. Nun ist

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} \;=\; \frac{1}{u_x^2 + v_x^2} \begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ -v_x & v_y \end{pmatrix}\;. \tag{27}$$

Für $z = x + iy = f^{-1}(u + iv)$ gilt also $x_u(w) = y_v(w)$ und $x_v(w) = -y_u(w)$ für alle $w \in V$. Also ist f^{-1} in V holomorph und es ist

$$(f^{-1})'(w) \;=\; \frac{u_x - iv_x}{u_x^2 + v_x^2}(z) \;=\; \frac{1}{f'(z)}\;. \tag{28}$$