4.3 Reelle Skalarprodukte, Hermitesche Formen, Orthonormalbasen

In diesem Abschnitt betrachten wir Vektorräume über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$. Ziel ist es, in solchen Vektorräumen "Längen" von Vektoren zu definieren.

Im $\mathbb{R}^n$ gilt für das kanonische Skalarprodukt ($\beta(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$) stets die Ungleichung $\beta(X,X) > 0$, falls $X \neq 0$, und deshalb läßt sich dort die Länge eines Vektors als $\sqrt{\beta(X,X)}$ definieren. Im $\mathbb{C}^n$ gilt $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 > 0$ nicht mehr für alle $X = (x_1, ..., x_n)$. Eine gegenüber Skalarprodukten etwas abgewandelte Terminologie erweist sich hier als brauchbarer.

Sesquilinearform

V sei ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\beta \; : \; V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt **Sesquilinearform**, falls gilt:

(H1) $\beta(aX + bY, Z) = a\beta(X,Z) + b\beta(Y,Z) \quad \forall X,Y,Z \in V \;,\; \forall a,b \in \mathbb{C}$

(H2) $\beta(X, aY + bZ) = \overline{a}\beta(X,Y) + \overline{b}\beta(X,Z) \quad \forall X,Y,Z \in V \;,\; \forall a,b \in \mathbb{C}$.

Beachte also: **Ein konstanter Faktor im zweiten Argument einer Sesquilinearform wird konjugiert komplex aus β herausgezogen.**

Spezielle Sesquilinearformen

1. Eine Sesquilinearform β heißt **hermitesche Form**, falls zusätzlich gilt: (H3) $\beta(X,Y) = \overline{\beta(Y,X)}$ für alle $X, Y \in V$.
2. Ist $V = \mathbb{C}^n$, so heißt die durch $\beta(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$ definierte hermitesche Form die **kanonische hermitesche Form** auf dem $\mathbb{C}^n$.

Hermitesche Matrix

Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ heißt **hermitesch**, falls gilt: $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^{\top}$.
Dabei ist $\overline{\mathbf{A}} = \overline{(a_{kl})} := (\overline{a_{kl}})$.

Es gilt:

1. Ersetzt man $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$, so entspricht einer hermiteschen Form ein (reelles) Skalarprodukt (siehe Aufgabe 2).
2. Für eine hermitesche Form β gilt $\beta(X,X) \in \mathbb{R}$ für alle $X \in V$ (siehe Aufgabe 1).

Wie bei Bilinearformen kann man in endlich–dimensionalen Vektorräumen auch eine hermitesche Form β nach Auszeichnung einer Basis $B = (B_1, ..., B_n)$ durch eine Matrix $\mathbf{B}_B(\beta) := (\beta(B_k, B_l))$ darstellen.

Zusammenhang zwischen hermiteschen Formen und Matrizen

Ist $B = (B_1, ..., B_n)$ eine Basis von V und $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, so heißt die Matrix $\mathbf{B}_B(\beta) := (\beta(B_k, B_l))$ **Matrix von** β (bezüglich der Basis B. Diese Matrix ist hermitesch.
Für $V = \mathbb{C}^n$ und $B = E$ schreiben wir $\mathbf{B}(\beta)$.
Ist umgekehrt $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermitesch, so wird durch

$$\beta_{\mathbf{A}} : \begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ (X, Y) & \longmapsto \quad X^\top \mathbf{A} \overline{Y} = \sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} x_k \overline{y_l} \end{cases}$$

eine hermitesche Form definiert.
Die **Wirkung** von $\mathbf{B}_B(\beta)$ wird beschrieben durch:

$$\beta(X, Y) = (k_B(X))^\top \cdot \mathbf{B}_B(\beta) \cdot \overline{k_B(Y)}.$$

Die Transformationsformel lautet hier:

Transformationsformel

Ist V ein $n-$dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, sind B und B' Basen von V und ist $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form, so gilt:

$$\mathbf{B}_{B'}(\beta) = (\mathbf{M}_B^{B'}(id))^\top \, \mathbf{B}_B(\beta) \, \overline{\mathbf{M}_B^{B'}(id)}.$$

Entsprechend der Kongruenz von Matrizen definiert man hier eine hermitesche Kongruenz:

Hermitesche Kongruenz

$\mathbf{A}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ heißen **hermitesch kongruent**, falls eine invertierbare Matrix $\mathbf{P} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ existiert mit $\mathbf{C} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$.

Wichtige Sätze

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   - (i) $\mathbf{A}$ ist hermitesch kongruent zu $\mathbf{C}$.
   - (ii) Es gibt eine invertierbare Matrix $\mathbf{P}$ mit $\mathbf{C} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$.
   - (iii) Es gibt eine Basis B des $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{C} = \mathbf{B}_B(\beta_{\mathbf{A}})$.
2. Jede hermitesche Matrix ist zu einer Diagonalmatrix hermitesch kongruent.

Hermitesche Matrizen über $\mathbb{C}$ haben also analoge Eigenschaften wie symmetrische Matrizen über $\mathbb{R}$.

Positive Definitheit[1]

Eine hermitesche Form (ein reelles Skalarprodukt) β auf V heißt **positiv definit**, falls gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \beta(X,X) \geq 0 \quad \text{für alle } X \in V \qquad \text{und} \\ \text{(ii)} & \beta(X,X) = 0 \iff X = 0. \end{array}$$

Für positiv definite hermitesche Formen (reelle Skalarprodukte) β kann man daher definieren:

$$\begin{array}{llcl} \textbf{Länge} \text{ von } X & : & \|X\| & := & \sqrt{\beta(X,X)} \\ \textbf{Abstand} \text{ von } X \text{ und } Y & : & d(X,Y) & := & \|X-Y\| \end{array}$$

Schreibweise: **Für positiv definite hermitesche Formen (reelle Skalarprodukte) β schreiben wir üblicherweise $\langle\ ,\ \rangle$.**

Orthonormalbasis

Ist $S \subseteq V$ ein Orthogonalsystem und gilt $\langle X,X\rangle = 1$ (d. h. $\|X\| = 1$) für alle $X \in S$, so heißt S ein **Orthonormalsystem**.
Ist S zusätzlich eine Basis von V, so heißt S **Orthonormalbasis** von V.

Existenz von Orthonormalbasen

Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) mit abzählbarer Basis und ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt (eine positiv definite hermitesche Form), so besitzt V eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$.

Orthogonale Basen werden wegen ihrer besonderen Eigenschaften häufig benutzt (man denke nur an das schon in der Schule eingeführte cartesische Koordinatensystem). In endlich–dimensionalen Vektorräumen und in Vektorräumen mit abzählbarer Dimension (siehe Aufgabe 12) mit positiv definitem Skalarprodukt lassen sich durch das folgende Verfahren Orthonormalbasen erzeugen.

[1] β ist ein reelles Skalarprodukt auf V bedeutet:
V ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ist eine symmetrische Bilinearform.

SCHMIDT'sches Orthogonalisierungsverfahren

Sei $(A_1, ..., A_n)$ linear unabhängig in V. $\langle\ ,\ \rangle$ sei eine positiv definite hermitesche Form bzw. ein positiv definites reelles Skalarprodukt auf V. Durch

$$\begin{aligned}
B_1 &:= A_1 \\
B_2 &:= A_2 - \frac{\langle A_2, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 \\
B_3 &:= A_3 - \frac{\langle A_3, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 - \frac{\langle A_3, B_2\rangle}{\langle B_2, B_2\rangle} B_2 \\
&\vdots \\
B_n &:= A_n - \frac{\langle A_n, B_1\rangle}{\langle B_1, B_1\rangle} B_1 - \ \ldots\ - \frac{\langle A_n, B_{n-1}\rangle}{\langle B_{n-1}, B_{n-1}\rangle} B_{n-1}
\end{aligned}$$

ist eine Orthogonalbasis $(B_1, ..., B_n)$ von $L(A_1, ..., A_n)$ gegeben, für die außerdem gilt:

$$L(A_1, ..., A_k) = L(B_1, ..., B_k) \text{ für } k = 1, ..., n.$$

$(C_1, ..., C_n)$ mit $C_k := \dfrac{B_k}{\|B_k\|}$ für $k = 1, ..., n$ ist dann eine Orthonormalbasis von $L(A_1, ..., A_n)$.

4.3.1

Man zeige daß für jede Abbildung $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ gilt:

a) *Ist β eine hermitesche Form, so ist $\beta(X, X) \in \mathbb{R}$ für alle $X \in V$.*

b) *Erfüllt β (H1) und (H3), so erfüllt β auch (H2).*

a) Sei $X \in V$ beliebig gegeben. Nach (H3) gilt $\beta(X, X) = \overline{\beta(X, X)}$. Gilt für eine komplexe Zahl z aber $z = \overline{z}$, so ist z reell. Also ist $\beta(X, X)$ reell.

b)
$$\begin{aligned}
\beta(X, aY + bZ) &= \overline{\beta(aY + bZ, X)} && \text{nach (H3)} \\
&= \overline{a\beta(Y, X) + b\beta(Z, X)} && \text{nach (H1)} \\
&= \overline{a}\,\overline{\beta(Y, X)} + \overline{b}\,\overline{\beta(Z, X)} && \text{Rechnen in } \mathbb{C} \\
&= \overline{a}\,\overline{\overline{\beta(X, Y)}} + \overline{b}\,\overline{\overline{\beta(X, Z)}} && \text{nach (H3)} \\
&= \overline{a}\,\beta(X, Y) + \overline{b}\,\beta(X, Z)\ .
\end{aligned}$$

4.3.2
Man zeige:
a) *Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und gelten für $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ die Bedingungen* (H1) *und* (H3)*, so ist β ein Skalarprodukt.*
b) *Jede reelle hermitesche Matrix ist symmetrisch.*

a) Aus (H3) folgt

$$\beta(X,Y) = \overline{\beta(Y,X)} = \beta(Y,X),$$

da β nach $\mathbb{R}$ abbildet. Also ist β symmetrisch. Die Linearität von β im zweiten Argument ergibt sich, da nach Aufgabe 1 aus (H1) und (H3) auch (H2) folgt und $a = \overline{a}$ für $a \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist β ein Skalarprodukt.

b) Ist $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ hermitesch, so ist $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{A}^\top$.

Der Begriff der hermiteschen Form ist damit die kanonische Erweiterung des Begriffs des reellen Skalarprodukts auf Vektorräume über $\mathbb{C}$.

4.3.3
Man untersuche, welche der folgenden Matrizen hermitesch sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ ist hermitesch, denn es ist $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$.
Man beachte: Hermitesche Matrizen haben in der Hauptdiagonale nur reelle Koeffizienten, denn nach Definition ist $a_{kk} = \overline{a_{kk}}$ $(k = 1, ..., n)$.
Die zweite Matrix ist nicht hermitesch, sondern symmetrisch. Für komplexe Matrizen sind hermitesch und symmetrisch **unterschiedliche** Begriffe.
Die letzte Matrix ist hermitesch, da wiederum $\mathbf{A} = \overline{\mathbf{A}}^\top$ gilt. Für reelle Matrizen fällt also hermitesch mit symmetrisch zusammen.

4.3.4
Es sei $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine hermitesche Matrix und $\beta : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\beta(X,Y) := X^\top \mathbf{A}\overline{Y} = \sum a_{kl}x_k\overline{y_l}$.
Man zeige, daß β eine hermitesche Form ist.

Nach Aufgabe 2 genügt der Nachweis von (H1) und (H3).
Nachweis von (H1):
Für alle $X, Y, Z \in \mathbb{C}^n$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\beta(aX + bY, Z) \quad = \quad (aX + bY)^\top \mathbf{A}\overline{Z} = (aX^\top + bY^\top)\mathbf{A}\overline{Z} =$$

$$\begin{aligned} &= aX^\top \mathbf{A}\overline{Z} + bY^\top \mathbf{A}\overline{Z} \\ &= a\beta(X,Z) + b\beta(Y,Z)\ . \end{aligned}$$

Nachweis von (H3):

$$\begin{aligned} \overline{\beta(Y,X)} &= \overline{Y^\top \mathbf{A}\overline{X}} \stackrel{(1)}{=} \overline{(Y^\top \mathbf{A}\overline{X})^\top} = \overline{\overline{X}^\top \mathbf{A}^\top Y} \\ &\stackrel{(2)}{=} X^\top \overline{\mathbf{A}}^\top \overline{Y} \stackrel{(3)}{=} X^\top \mathbf{A}\overline{Y} \\ &= \beta(X,Y)\ . \end{aligned}$$

Dabei gilt (1), da $Y^\top \mathbf{A}\overline{X}$ eine komplexe Zahl und damit gleich ihrer Transponierten ist. (2) gilt wegen $\overline{XY} = \overline{X}\,\overline{Y}$, und (3) gilt, da $\mathbf{A}$ eine hermitesche Matrix ist.

Bemerkung: Für $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ erhält man $\beta(X,Y) = \sum x_k \overline{y_k}$ und damit die kanonische hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$.

4.3.5

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sei eine hermitesche Matrix. Man zeige:

a) *$\mathbf{A}^\top$ und $\overline{\mathbf{A}}$ sind hermitesch.*

b) *Ist $\mathbf{A}$ invertierbar, so ist auch $\mathbf{A}^{-1}$ hermitesch.*

a) Zu zeigen ist $(\overline{\mathbf{A}^\top})^\top = \mathbf{A}^\top$ und $\overline{\overline{\mathbf{A}}}^\top = \overline{\mathbf{A}}$.
Man macht sich zunächst sofort klar, daß die Reihenfolge von Konjugieren und Transponieren beliebig ist, und schließt dann:

$$(\overline{\mathbf{A}^\top})^\top = \overline{\mathbf{A}^{\top\top}} = \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^\top,$$

da $\mathbf{A}$ hermitesch ist.

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{A}}}^\top &= \mathbf{A}^\top = (\overline{\mathbf{A}}^\top)^\top \quad \text{da } \mathbf{A} \text{ hermitesch ist} \\ &= \overline{\mathbf{A}}\ . \end{aligned}$$

b) Aus $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ folgt $\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}^{-1}} = \overline{\mathbf{E}} = \mathbf{E}$.
Transponieren liefert $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top \cdot \overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{E}$, und da $\mathbf{A}$ hermitesch ist, gilt

$$(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Analog folgt

$$\mathbf{A}\cdot\overline{\mathbf{A}^{-1}}^\top = \mathbf{E}.$$

$(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top$ ist damit invers zu $\mathbf{A}$, also gilt $(\overline{\mathbf{A}^{-1}})^\top = \mathbf{A}^{-1}$.

4.3.6
Ist $\mathbf{A}$ *eine komplexe (reelle)* $n \times n-$*Matrix, so ist die Matrix* $\mathbf{B} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top$ *hermitesch (symmetrisch).*
Ist $\mathbf{A}$ *invertierbar, so ist* $\beta_\mathbf{B}$ *positiv definit.*

Man erhält direkt:

$$\overline{(\mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top)}^\top = (\overline{\mathbf{A}}\,\overline{\overline{\mathbf{A}}}^\top)^\top = (\overline{\mathbf{A}}\,\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^{\top\top}\overline{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top .$$

Zum Beweis der positiven Definitheit von $\beta_\mathbf{B}$ für invertierbares $\mathbf{A}$:
Es ist

$$X^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{A}}^\top \overline{X} = (\mathbf{A}^\top X)^\top\, \overline{(\mathbf{A}^\top X)} = \sum_{k=1}^n z_k \overline{z_k} ,$$

falls $\mathbf{A}^\top X = (z_1, ..., z_n) =: Z$. Da $\mathbf{A}$ invertierbar ist, ist für $X \neq 0$ auch $Z \neq 0$. Die Behauptung folgt nun, da die kanonische hermitesche Form (das kanonische Skalarprodukt) positiv definit ist.

4.3.7
Man zeige:

a) *Jede hermitesche Matrix* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ *ist zu einer Diagonalmatrix* $\mathbf{D}$ *hermitesch kongruent.*

b) *Ist* V *ein Vektorraum über* $\mathbb{C}$, $n = \dim V \in \mathbb{N}$ *und* β *eine hermitesche Form auf* V*, so besitzt* V *eine bzgl.* β *orthogonale Basis* B.

Wie bei reellen Skalarprodukten sind a) und b) äquivalent. Setzen wir nämlich a) voraus, und ist $C = (C_1, ..., C_n)$ eine Basis von V und $\mathbf{A} := \mathbf{B}_C(\beta)$, so gibt es eine invertierbare Matrix $\mathbf{P} = (p_{kl})$, so daß $\mathbf{D} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}$ eine Diagonalmatrix ist. Setze $B_l = \sum_{k=1}^n p_{kl} C_l$. Dann ist $B = (B_1, ..., B_n)$ eine Basis von V, da die Koordinatenvektoren der B_l bzgl. C als Spalten von $\mathbf{P}$ linear unabhängig sind. Ferner gilt $\mathbf{P} = \mathbf{M}_C^B(id)$. Nach der Transformationsformel folgt:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}_B(\beta) = (\beta(B_k, B_l)) .$$

Somit ist B eine orthogonale Basis bzgl. β.
Umgekehrt folgt a) aus b), falls man in b) $V = \mathbb{C}^n$ und $\beta = \beta_\mathbf{A}$ wählt:
Schreibt man die Vektoren von B in die Spalten einer Matrix $\mathbf{P}$, so gilt nach der Transformationsformel $\mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}} = \mathbf{B}_B(\beta_\mathbf{A})$, und $\mathbf{B}_B(\beta_\mathbf{A})$ ist eine Diagonalmatrix.

Wir zeigen nun a). Die wesentlichen Schritte zu diesem Beweis stehen schon in Aufgabe 4.1.8. Wegen $a_{lk} = \overline{a_{kl}}$ und wegen der hermiteschen Kongruenz (es soll $\mathbf{D} = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}}$ gelten) ändert sich gegenüber Aufgabe 4.1.8 folgendes: Wenn wir von links mit einer Elementarmatrix $\mathbf{C}$ multiplizieren, also eine elementare Zeilenumformung durchführen, müssen wir von rechts stets mit $\overline{\mathbf{C}}^\top$ multiplizieren. $\overline{\mathbf{C}}^\top$ entspricht dann der zugehörigen "hermiteschen" Spaltenumformung:

> Entspricht $\mathbf{C}$ der Multiplikation von Zeile k mit $\alpha \in \mathbb{C}$, so entspricht $\overline{\mathbf{C}}^\top$ der Multiplikation von Spalte k mit $\overline{\alpha}$.
>
> Entspricht $\mathbf{C}$ der Addition des $\alpha-$fachen von Zeile j zu Zeile k, so entspricht $\overline{\mathbf{C}}^\top$ der Addition des $\overline{\alpha}-$fachen von Spalte j zu Spalte k.

Fall 3 des Verfahrens aus 4.1.8 ($a_{kk} = 0$ für alle k) ist wie folgt zu ergänzen: Wähle $a_{kl} \neq 0$ ($l \neq k$). Ist $\Re(a_{kl}) \neq 0$ (der Realteil von a_{kl}), so addiere die $k-$te Zeile zur $l-$ten Zeile und die $k-$te Spalte zur $l-$ten Spalte. Dann steht an der Stelle (l,l) die Zahl $a_{kl} + a_{lk} = a_{kl} + \overline{a_{kl}} = 2\Re(a_{kl}) \neq 0$, und man ist im Fall 2. Ist $\Re(a_{kl}) = 0$, so multipliziere die $k-$te Zeile mit i und die $k-$te Spalte mit $-i$ und verfahre dann wie bei $\Re(a_{kl}) \neq 0$.

Mit diesem Verfahren erhalten wir analog zu Aufgabe 4.1.8 die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}_s ... \mathbf{C}_1 \mathbf{A} \overline{\mathbf{C}_1}^\top ... \overline{\mathbf{C}_s}^\top = \mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$$

mit

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_1^\top ... \mathbf{C}_s^\top = (\mathbf{C}_s ... \mathbf{C}_1)^\top \ .$$

4.3.8

Zu den folgenden Matrizen bestimme man jeweils eine invertierbare Matrix $\mathbf{P}$*, so daß* $\mathbf{P}^\top \mathbf{A} \overline{\mathbf{P}}$ *eine Diagonalmatrix ist. Ferner bestimme man eine bzgl.* $\beta_{\mathbf{A}}$ *orthogonale Basis des* $\mathbb{C}^2$ *bzw.* $\mathbb{C}^3$.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$, **b)** $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Es wird die Methode aus der vorigen Aufgabe verwendet.

Schematische Rechnung bei der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$:

1	i	1	0	i
$-i$	2	0	1	1
1	i	1	0	
0	1	i	1	

Die zugehörige hermitesche Spaltenumformung besteht nun darin, das $(-i)-$fache der ersten Spalte zur zweiten Spalte zu addieren. Das liefert die Endmatrix:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1 \end{array}\right).$$

Die jetzt rechts stehende Matrix ist die Matrix $\mathbf{P}^\top$. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist also eine gesuchte Matrix.
Probe:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\top \mathbf{A}\overline{\mathbf{P}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Spalten von $\mathbf{P}$ liefern eine bzgl. $\beta_\mathbf{A}$ orthogonale Basis.

b)

1	$1+i$	$2i$	1	0	0	$i-1$	$2i$
$1-i$	4	$2-3i$	0	1	0	1	
$-2i$	$2+3i$	7	0	0	1		1
1	$1+i$	$2i$	1	0	0		
0	2	$-5i$	$i-1$	1	0		
0	$5i$	3	$2i$	0	1		

Man beachte, daß die zugehörigen (hermiteschen) Spaltenumformungen im Prinzip nicht durchgerechnet werden müssen, da sich dadurch in der ersten Zeile lediglich zwei Nullen ergeben, aber sonst keine Änderungen eintreten. Ausnahmefall: Multiplikation der umgeformten Zeile mit $a \neq 0$.

1	0	0	1	0	0	
0	2	$-5i$	$i-1$	1	0	$-\frac{5}{2}i$
0	$5i$	3	$2i$	0	1	1
1	0	0	1	0	0	
0	2	0	$i-1$	1	0	
0	0	$-\frac{19}{2}$	$\frac{5}{2}+\frac{9}{2}i$	$-\frac{5}{2}i$	1	

Eine gesuchte Matrix $\mathbf{P}$ lautet also:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i-1 & \frac{5}{2}+\frac{9}{2}i \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2}i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Spalten von $\mathbf{P}$ liefern eine bzgl. $\beta_\mathbf{A}$ orthogonale Basis.

c)

0	0	$-i$	1	0	0	
0	0	0	0	1	0	
i	0	0	0	0	1	i
0	0	-1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	
-1	0	0	0	0	i	1
-2	0	-1	1	0	i	$-\frac{1}{2}$
0	0	0	0	1	0	
-1	0	0	0	0	i	1
-2	0	0	1	0	i	
0	0	0	0	1	0	
0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}i$	

Eine gesuchte Matrix $\mathbf{P}$ lautet also:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & \frac{1}{2}i \end{pmatrix} .$$

Die Spalten von $\mathbf{P}$ liefern eine bzgl. $\beta_{\mathbf{A}}$ orthogonale Basis.

4.3.9

Der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Man bestimme eine Orthonormalbasis für den Untervektorraum

$$U := L((1,1,0,1),(1,-2,0,0),(1,0,-1,2)).$$

Es wird das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren durchgeführt. Wir erhalten zunächst:

$$\begin{aligned} B_1 &= (1,1,0,1)\ ; \\ B_2 &= (1,-2,0,0) - \frac{(1,-2,0,0)\cdot(1,1,0,1)}{(1,1,0,1)\cdot(1,1,0,1)}\,(1,1,0,1) \\ &= \frac{1}{3}\,(4,-5,0,1)\ ; \\ B_3 &= (1,0,-1,2) - \frac{3}{3}\,(1,1,0,1) - \frac{2}{\frac{14}{3}}\cdot\frac{1}{3}\,(4,-5,0,1) \\ &= \frac{1}{7}\,(-4,-2,-7,6)\ . \end{aligned}$$

Durch Normieren der Vektoren ergibt sich die folgende Orthonormalbasis B von U:

$$B = (\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{42}}\,(4,-5,0,1),\ \frac{1}{\sqrt{105}}\,(-4,-2,-7,6))\ .$$

4.3.10

Im $\mathbb{R}^5$ mit dem kanonischen Skalarprodukt sei

$$U := L((1,2,3,1,1),(1,3,2,1,2)).$$

Man bestimme Orthonormalbasen von U und $U^\perp$.

Das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren liefert zunächst eine Orthogonalbasis von U.

$$\begin{aligned} B_1 &= (1,2,3,1,1)\ ; \\ B_2 &= (1,3,2,1,2) - \frac{16}{16}(1,2,3,1,1) = (0,1,-1,0,1)\ . \end{aligned}$$

Die Basis (B_1, B_2) wird nun zu einer Basis des $\mathbb{R}^5$ ergänzt, z. B. durch $(1,0,0,-1,0), (0,1,0,0,0)$ und $(0,0,1,0,0)$. (Nachrechnen!)
Diese Basis wird nun wieder orthogonalisiert, wobei das Verfahren sofort mit B_4 fortgesetzt werden kann, denn $B_3 = (1,0,0,-1,0)$ ist schon so gewählt, daß $\langle B_1, B_3\rangle = \langle B_2, B_3\rangle = 0$ gilt.

$$\begin{aligned} B_4 &= (0,1,0,0,0) - \frac{2}{16}(1,2,3,1,1) - \frac{1}{3}(0,1,-1,0,1) - 0\cdot(1,0,0,-1,0) \\ &= (-\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{8}, -\frac{11}{24})\ ; \\ B_5 &= (0,0,1,0,0) - \frac{3}{16}(1,2,3,1,1) + \frac{1}{3}(0,1,-1,0,1) + \\ &\quad + \frac{1}{10}(-\frac{1}{8}, \frac{5}{12}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{8}, -\frac{11}{24}) \\ &= (-\frac{1}{5}, 0, \frac{1}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{10})\ . \end{aligned}$$

Normieren liefert nun:
$(\frac{1}{4}(1,2,3,1,1)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,0,1))$ ist eine Orthonormalbasis von U.
$(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1,0)\ ,\ \frac{1}{4\sqrt{15}}(-3,10,-1,-3,-11)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{10}}(-2,0,1,-2,1))$ ist eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.
Da $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$, haben wir auch eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^5$ gefunden.

4.3.11

Der $\mathbb{C}^4$ sei mit der üblichen hermiteschen Form $\langle X, Y\rangle = \sum x_k \overline{y_k}$ versehen. Man bestimme eine Orthonormalbasis von

$$U := L((1,0,i,-1),(0,2,1,-i),(i,-2,-2,0)).$$

Es wird wieder das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren angewendet.

$$
\begin{aligned}
B_1 &= (1,0,i,-1)\ ; \\
\langle B_1,B_1\rangle &= \langle (1,0,i,-1),(1,0,i,-1)\rangle = 1 + i\cdot \overbrace{(-i)}^{!} + 1 = 3\ , \\
B_2 &= (0,2,1,-i) - \frac{1}{3}\,\langle (0,2,1,-i),(1,0,i,-1)\rangle\,(1,0,i,-1) \\
&= (0,2,1,-i)\ ; \\
\langle B_2,B_2\rangle &= 4+1+(-i)\cdot i = 6\ , \\
B_3 &= (i,-2,-2,0) - \frac{1}{3}\,\langle (i,-2,-2,0),(1,0,i,-1)\rangle\,(1,0,i,-1) \\
&\quad -\frac{1}{6}\langle (i,-2,-2,0),(0,2,1,-i)\rangle\,(0,2,1,-i) \\
&= (i,-2,-2,0) - (i,0,-1,-i) + (0,2,1,-i) \\
&= (0,0,0,0)\ .
\end{aligned}
$$

Da sich hier $B_3 = 0$ ergibt, folgt $B_3 \in L((1,0,i,-1),(0,2,1,-i))$. Damit bilden B_1 und B_2 eine Orthogonalbasis von U. Normieren liefert hier die folgende Orthonormalbasis B von U:

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,0,i,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}\,(0,2,1,-i)\right)\ .$$

Hinweis: Die Lösung der Aufgabe zeigt, daß man bei der Anwendung des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens nicht unbedingt mit einer Basis von U beginnen muß. Bei der Durchführung des Verfahrens erkennt man, ob die gegebenen Vektoren linear unabhängig sind, und man läßt gegebenenfalls Vektoren B_k, die sich als Nullvektor ergeben, einfach fort.

4.3.12

Man zeige:
Ist V ein reeller (komplexer) Vektorraum mit abzählbarer Basis und ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein positiv definites Skalarprodukt (eine positiv definite hermitesche Form) auf V, so besitzt V eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$.
Ferner gilt: Jedes endliche Orthonormalsystem S von V läßt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

Hat V endliche Dimension, so folgt die erste Behauptung aus Aufgabe 7.
Hat V unendliche Dimension, so liefert unsere Formulierung des SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens, ausgehend von einer Basis $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ von V, Vektoren B_m ($m \in \mathbb{N}$) der Länge 1, die paarweise orthogonal sind und für die

$$L(A_1, ..., A_m) = L(B_1, ..., B_m) \text{ für jedes } m \geq 1$$

gilt. Damit folgt sofort, daß $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von V bzgl. $\langle\ ,\ \rangle$ ist.

Ist $S = \{A_1, ..., A_l\} \subseteq V$ ein Orthonormalsystem, also insbesondere linear unabhängig, so ergänze S durch $A_{l+1}, A_{l+2}, ...$ zu einer Basis von V und wende das SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren an. Nach Voraussetzung über S folgt: $B_1 = A_1, ..., B_l = A_l$. Damit ist $\{B_1, ..., B_n\}$ (im Falle $\dim V = n$) bzw. $\{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von V, die S enthält.

4.3.13

a) *Man zeige:*
Im Vektorraum $V = C[-\pi, \pi]$ der auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ stetigen reellen Funktionen definiert

$$\langle g, h\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(t)\, dt$$

ein positiv definites Skalarprodukt.

b) *Man betrachte den von den Funktionen c_k und s_k mit $c_k(t) = \cos kt$ und $s_k(t) = \sin kt$ ($k = 0, 1, 2, 3, ...$) erzeugten Unterraum U von V. Für U gebe man eine Orthogonalbasis und eine Orthonormalbasis an.*

a) Seien $f, g, h \in V$.

1. Die **Symmetrie** $\langle g, h\rangle = \langle h, g\rangle$ folgt aus $g(t) \cdot h(t) = h(t) \cdot g(t)$ $(t \in \mathbb{R})$.
2. Die **Bilinearität** ergibt sich aus aus der Linearität des Integrals zusammen mit dem Distributivgesetz $(f + g)h = fh + gh$.
3. Die **positive Definitheit** folgt aus einem Satz der Analysis:
   Ist f stetig auf $[a, b]$ und $f(t) \neq 0$ für ein $t \in [a, b]$ (d. h. $f \neq 0$), so gilt $\int_a^b (f(t))^2\, dt > 0$.

b) Integrationskenntnisse aus der Analysis führen zu der *Behauptung*:
Die Funktionen 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t$, $\cos 3t$, $\sin 3t$, ... bilden eine Orthogonalbasis von U.
Zunächst gilt für $k \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin kt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos kt\, dt = 0\ .$$

Für $k_1 \neq k_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1 t \cdot \cos k_2 t \, dt = 0 \quad , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos k_1 t \cdot \sin k_2 t \, dt = 0 \; ,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1 t \cdot \sin k_2 t \, dt = 0 \quad , \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin k_1 t \cdot \cos k_1 t \, dt = 0 \; .$$

Dies entnimmt man einer Formelsammlung oder leitet es durch partielle Integration selbst her.
Damit ist die angegebene Behauptung bewiesen.
Eine Orthonormalbasis erhält man dann durch Normieren. Dazu wird berechnet:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt = 2\pi \; , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt \, dt = \pi \; , \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt \, dt = \pi \; .$$

Die letzten beiden Gleichungen gelten für $k \geq 1$. Damit erhält man durch $e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, ...$ mit

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; , \quad e_{2k-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \; , \quad e_{2k}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \qquad (k \in \mathbb{N})$$

eine Orthonormalbasis von U.

Bemerkung: Die angegebene Orthogonalbasis wird in der Analysis benutzt zur Approximation von periodischen Funktionen durch trigonometrische Funktionen. Dies führt zur Theorie der **Fourier–Reihen**.

4.3.14

Der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ sei mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^{1} f(t)(g(t) \, dt$$

versehen.

a) *Man bestimme eine Orthonormalbasis des Unterraumes $L(1, x, x^2, x^3)$.*

b) *Man berechne in diesem Vektorraum den Abstand von $f = 1 + x$ und $g = x^2 - 1$.*

a) Es wird das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren angewendet und zunächst eine Orthogonalbasis bestimmt.
(Der aufmerksame Leser denkt an Aufgabe 4.1.7.)

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \; , \\ B_1 &= x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 = x \; , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= x^2 - \frac{\langle x^2, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 = x^2 - \frac{1}{3}\ , \\ B_3 &= x^3 - \frac{\langle x^3, x^2 - \frac{1}{3}\rangle}{\langle B_2, B_2\rangle}(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{\langle x^3, x\rangle}{\langle x, x\rangle} x - \frac{\langle x^3, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} 1 \\ &= x^3 - \frac{3}{5}\, x\ . \end{aligned}$$

Nun wird noch normiert. Dazu werden die folgenden Skalarprodukte berechnet, die teilweise bei der Berechnung der B_i schon benötigt wurden:

$$\begin{aligned} \langle B_0, B_0\rangle &= \langle 1, 1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\ dx = 2 \\ \langle B_1, B_1\rangle &= \langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\ dx = \frac{2}{3} \\ \langle B_2, B_2\rangle &= \langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2\ dx = \frac{8}{45} \\ \langle B_3, B_3\rangle &= \langle x^3 - \frac{3}{5}x, x^3 - \frac{3}{5}x\rangle = \frac{24}{7\cdot 75} = \frac{8}{175}\ . \end{aligned}$$

Als Orthonormalbasis von $L(1, x, x^2, x^3)$ erhält man damit:

$$E_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}\, x^0\ ; \quad E_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\, x^1\ ; \quad E_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\,(3x^2-1)\ ; \quad E_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\,(5x^3-3x)\ .$$

Bemerkung: Teilt man E_n jeweils durch $\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}$, so erhält man die sog. LEGENDRE–Polynome

$$q_n := \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2 - 1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

b) Für den Abstand $d(f, g)$ erhält man:

$$\begin{aligned} d(f, g) = \|f - g\| &= \sqrt{\langle f - g, f - g\rangle} = \Big(\int_{-1}^{1} (x^2 - x - 2)^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4)\, dx\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{32}{5}}\ . \end{aligned}$$

4.3.15

a) *Der Vektorraum V über $\mathbb{C}$ (über $\mathbb{R}$) sei mit der positiv definiten hermiteschen Form (dem positiv definiten Skalarprodukt) $\langle\ ,\ \rangle$ versehen. Man beweise: Ist $(A_1, ..., A_n)$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für alle $X, Y \in V$:*

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle X, A_k\rangle\, \overline{\langle Y, A_k\rangle}$$

b) *Man bestimme die sich in a) ergebende Gleichung für den Fall, daß $\langle\ ,\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$, $(A_1, ..., A_n) = E$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor und $Y = X$ ist.*

c) *Es sei U der von den Funktionen c_k und s_k mit*

$$c_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx\ , \quad s_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

erzeugte Untervektorraum des Vektorraums $C[-\pi, \pi]$ der stetigen reellen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}$ mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 13. Wie lautet die Gleichung in a) in diesem Falle für $X = Y = f \in U$?

a) Sei $Y = \sum y_k A_k$. Es folgt:

$$\begin{aligned} \langle X, Y\rangle &= \langle X, \sum_{k=1}^{n} y_k A_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle X, y_k A_k\rangle \quad \text{nach Aufgabe 2 b)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \langle X, A_k\rangle \overline{y_k} \quad \text{nach Aufgabe 2 c)}\ . \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\langle Y, A_j\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} y_k A_k, A_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k \underbrace{\langle A_k, A_j\rangle}_{=\delta_{kj}} = y_j\ .$$

Setzt man dies in die vorige Zeile ein, so folgt die zu beweisende Gleichung

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle X, A_k\rangle\, \overline{\langle Y, A_k\rangle}\ .$$

Bemerkung: Diese Gleichung heißt **PARSEVALsche Gleichung**.

b) Mit $X = Y$ folgt zunächst

$$\langle X, X\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle X, E_k\rangle \overline{\langle X, E_k\rangle} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x_k} \quad \text{nach a)},$$

und wenn X nur reelle Komponenten hat, dann gilt $\langle X, X\rangle = \sum x_k^2$.

Bemerkung: $x_k = \langle X, E_k\rangle$ bedeutet unter der Voraussetzung, daß das übliche Skalarprodukt vorliegt:

$$x_k = |X| \cdot |E_k| \cdot \cos \sphericalangle(X, E_k).$$

Wegen $|E_k| = 1$ und $|X| = 1$ erkennt man $x_k = \cos \sphericalangle(X, E_k)$, und damit folgt insgesamt der (bekannte) Satz:
Für jeden reellen Vektor ist die Summe der Kosinusquadrate der Winkel mit den Achsen gleich 1.

c) In der angegebenen Aufgabe 13 wurde gezeigt, daß die Funktionen c_k und s_k mit

$$c_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \ ; \qquad s_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

eine Orthonormalbasis eines Untervektorraumes U des Vektorraumes $C[-\pi, \pi]$ der reellen Funktionen von $[-\pi, \pi]$ nach $\mathbb{R}$ bilden. Also ist die Aufgabe sinnvoll gestellt, und man erhält hier die folgende PARSEVALsche Gleichung für den Spezialfall $X = Y = f \in U$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\,dx\Big)^2 + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\,dx\Big)^2 .$$