7.5 Konvexität und Extremalpunkte

Zu Trennungssätzen siehe Abschnitt 7.2-8 ff.

Konvexität ist ein algebraischer und kein topologischer Begriff. Sei also E ein beliebiger Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

7.5-1 Konvexe Mengen

Die *Verbindungsstrecke* zweier Punkte $x, y \in E$ ist die Menge

$$[x, y] := \left\{ \lambda x + (1-\lambda)y \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \le \lambda \le 1 \right\} . \tag{1}$$

Eine Teilmenge $K \subset E$ heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke $[x, y]$ in K liegt.

$$K \text{ konvex} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x, y \in K \;:\; [x, y] \subset K . \tag{2}$$

7.5-2 Bemerkungen

(a) Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex, die Vereinigung i.a. nicht.

(b) Affine Unterräume sind konvex.

(c) In normierten Räumen sind offene und abgeschlossene ε-Umgebungen konvex, aber nicht in beliebigen metrischen Vektorräumen (11.6.J).

(d) In topologischen Vektorräumen sind konvexe Mengen zusammenhängend.

(e) In topologischen Vektorräumen sind abgeschlossene Hüllen und innere Kerne konvexer Mengen ebenfalls konvex (12.4.B).

(f) Je zwei offene konvexe Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind homöomorph (12.4.D).

7.5-3 Absolut konvexe Mengen

Kreisförmige (5.1-6) konvexe Teilmengen von E heißen *absolut konvex.*
$A \subset E$ ist genau dann absolut konvex, wenn

$$\forall\, x, y \in A\ \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \;:\quad |\lambda| + |\mu| \le 1 \implies \lambda x + \mu y \in A . \tag{3}$$

7.5-4 Konvexe Hülle

Seien weiterhin E ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $A \subset E$.
Der Durchschnitt aller konvexen Obermengen von A ist konvex und natürlich in jeder konvexen Obermenge enthalten. Er ist die "kleinste konvexe Obermenge" von A und heißt *konvexe Hülle* von A. Bezeichnung:

$$\operatorname{co} A := \bigcap \left\{ K \;\middle|\; A \subset K \subset E,\ K \text{ konvex} \right\} . \tag{4}$$

Sind $A \subset E$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_j \ge 0$ und $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, so heißt $\sum_{j=1}^n \lambda_j\, x_j$ *Konvexkombination* aus A.

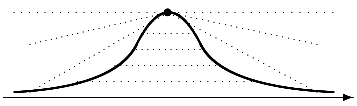
Die konvexe Hülle von A ist die Menge aller Konvexkombinationen aus A, d.h.

$$\operatorname{co} A \;=\; \left\{\; \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, x_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \;\right\} . \tag{5}$$

Die konvexe Hülle zweier Punkte ist ihre Verbindungsstrecke.

Es ist $\operatorname{co}(\lambda A) = \lambda \operatorname{co} A$ und $\operatorname{co}(A+B) = \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$.

In einem topologischen Vektorraum ist die konvexe Hülle einer offenen Menge offen, aber die konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge nicht notwendig abgeschlossen.



Z.B. ist $A := \{\,(x,y)\,|\,x \in \mathbb{R},\ y = (1+x^2)^{-1}\,\} \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, aber $\operatorname{co} A = \{\,(x,y)\,|\,0 < y < 1\,\} \cup \{(0,1)\}$ ist nicht abgeschlossen.

7.5-5 Abgeschlossene konvexe Hülle

Sei E ein topologischer Vektorraum und $A \subset E$.

$$\overline{\operatorname{co}}\, A \;:=\; \bigcap \left\{\; B \;\middle|\; A \subset B \subset E,\ B \text{ abgeschlossen und konvex} \;\right\} \tag{6}$$

ist die kleinste abgeschlossene konvexe Menge, die A enthält, und heißt *abgeschlossene konvexe Hülle* von A. Es ist $\overline{\operatorname{co}}\, A = \overline{\operatorname{co} A}$.

7.5-6 Rechenregeln

Seien E ein (topologischer) Vektorraum und $A, B \subset E$. Dann gilt (12.4.B)

(i) $\operatorname{co}(\lambda A) \;=\; \lambda \operatorname{co} A$, $\overline{\operatorname{co}}\,(\lambda A) \;=\; \lambda\, \overline{\operatorname{co}}\, A$,

(ii) $\operatorname{co}(A+B) \;=\; \operatorname{co} A + \operatorname{co} B$,

(iii) Ist $\overline{\operatorname{co}}\; A$ kompakt, so gilt $\overline{\operatorname{co}}\,(A+B) \;=\; \overline{\operatorname{co}}\, A + \overline{\operatorname{co}}\, B$.

7.5-7 Extremalpunkte

Sei $A \subset E$ konvex. Ein Punkt $x_0 \in A$ heißt *Extremalpunkt* von A, wenn x_0 nicht innerer Punkt einer Strecke in A ist, d.h. für alle $a, b \in A$, $0 < \lambda < 1$ gilt

$$x_0 = \lambda a + (1-\lambda) b \qquad \Longrightarrow \qquad a = b = x_0\ . \tag{7}$$

Mit $\operatorname{ext} A$ bezeichnen wir die Menge der Extremalpunkte von A.

Ist $A \subset E$ konvex, so heißt $B \subset A$ *extremale Menge* von A, wenn für alle $a, b \in A$, $0 < \lambda < 1$ gilt

$$\lambda a + (1-\lambda) b \in B \qquad \Longrightarrow \qquad a, b \in B\ . \tag{8}$$

Trivialerweise ist A eine extremale Menge von sich selbst. Ecken, Kanten und Seitenflächen eines Quaders $Q \subset \mathbb{R}^3$ sind extremale Mengen von Q.

Es gilt: x_0 ist Extremalpunkt von $A \iff \{x_0\}$ ist extremale Menge von A.

Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man zeigen, dass jede nichtleere abgeschlossene extremale Menge einer kompakten konvexen Menge $\emptyset \neq A$ einen Extremalpunkt von A enthält, insbesondere dass $\operatorname{ext} A \neq \emptyset$.

7.5-8 Bemerkungen

In topologischen Vektorräumen E gilt u.a.

(a) Für alle $A \subset E$ ist $\operatorname{ext} A \subset \partial A$.

(b) Die Menge $\operatorname{ext} A$ der Extremalpunkte einer kompakten konvexen Menge A ist nicht notwendig abgeschlossen (12.4.E).

(c) Eine kompakte konvexe Menge ist nicht notwendig die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte (12.4.F).

(d) Es gibt abgeschlossene konvexe Mengen ohne Extremalpunkte (12.4.H).

7.5-9 Satz von Krein-Milman

Sei E ein lokal-konvexer topologischer Vektorraum und $\emptyset \neq A \subset E$ eine kompakte konvexe Teilmenge. Dann ist A die abgeschlossene konvexe Hülle der Extremalpunkte von A, d.h. es ist $A = \overline{\text{co}}\,(\operatorname{ext} A)$.

Beweisidee: Sei $C := \overline{\text{co}}\,(\operatorname{ext} A)$. Angenommen, es ist $x_0 \in A \backslash C$. Dann gibt es nach Hahn-Banach ein stetiges Funktional φ mit $\inf \varphi(C) > \varphi(x_0)$.

$B := A \cap \varphi^{-1}(\inf \varphi(C)) \neq \emptyset$ ist eine extremale Menge von A. Sie muss einen Extremalpunkt von A enthalten. Widerspruch zu $B \cap \operatorname{ext} A \subset B \cap C = \emptyset$.

7.5-10 Extremalpunkte von Einheitskugeln

Manchmal interessiert man sich in normierten Räumen E für die Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel $B := \{ x \in E \mid \|x\| \leq 1 \}$.
Beispielsweise gilt (12.4.G):

(a) In strikt konvexen Räumen ist $\operatorname{ext} B = \partial B = \{ x \in E \mid \|x\| = 1 \}$.
Speziell gilt dies in Hilberträumen, sowie in ℓ^p und $L^p(\mu)$ für $1 < p < \infty$.

(b) In $(c_0, \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \emptyset$.

(c) In $(c, \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \left\{ x \in c \;\middle|\; \forall k \;:\; |x_k| = 1 \right\}$.

(d) In $(\ell^1, \|.\|_1)$ ist $\operatorname{ext} B = \left\{ \alpha\, e^{(n)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\; |\alpha| = 1 \right\}$.

(e) In $(\ell^\infty, \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \{ z \in \ell^\infty \mid \forall k \;:\; |z_k| = 1 \}$.

(f) In $((C[0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \{ f_1 :\equiv 1,\; f_2 :\equiv -1 \}$.

(g) In $((C[0,1], \mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \left\{ f \;\middle|\; \forall\, 0 \leq t \leq 1 \;:\; |f(t)| = 1 \right\}$.

(h) In $C[0,1]^*, \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \left\{ \{ f \mapsto f(t) \} \;\middle|\; 0 \leq t \leq 1 \right\}$ bzw $\operatorname{ext} B = \left\{ \alpha\, \delta_t \;\middle|\; |\alpha| = 1 \right\}$ wenn man $C[0,1]^* \cong rca[0,1]$ identifiziert.

(i) Sei X ein lokalkompakter, aber nicht kompakter T_2-Raum.
Dann ist $\operatorname{ext} B = \emptyset$ in $((C_0(X), \|.\|_\infty)$.

(j) In $(L^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ ist $\operatorname{ext} B = \emptyset$.

(k) In $(L^\infty[0,1], \|.\|_\infty)$ ist $\operatorname{ext} B = \left\{ f \in L^\infty[0,1] \;\middle|\; |f(t)| = 1 \text{ f.ü.} \right\}$.

7.5-11 Bemerkung

c_0 ist nicht der stetige Duale eines Banachraums. Denn wäre E ein Banachraum mit $c_0 = E^*$, so wäre die abgeschlossene Einheitskugel B nach Alaoglu (7.4-13) w^*-kompakt und müsste nach Krein-Milman Extremalpunkte besitzen.

Ebenfalls aus Krein-Milman folgt, dass $(C[0,1], \mathbb{R})$ nicht der stetige Duale eines Banachraums ist.

7.5-12 Gleichmäßig konvexe Räume

In allen normierten Räumen sind ε-Kugeln konvex. In *gleichmäßig* bzw *strikt konvexen* Räumen erfüllen sie eine stärkere geometrische Bedingung.

Ein normierter Raum E heißt *gleichmäßig konvex*, wenn

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in E\ : \\ &\qquad \|x\|, \|y\| \le 1,\ \|x-y\| \ge \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|\tfrac{x+y}{2}\| \le 1 - \delta\ . \end{aligned} \tag{9}$$

Dies ist äquivalent zu der Bedingung

$$\|x_n\|, \|y_n\| \le 1,\ \frac{\|x_n + y_n\|}{2} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0\ . \tag{10}$$

Eine Abschwächung der gleichmäßigen Konvexität ist die *strikte Konvexität*:

7.5-13 Strikt konvexe Räume

Ein normierter Raum E heißt *strikt konvex*, wenn

$$\forall x, y \in E\ :\ \|x\|, \|y\| = 1,\ x \ne y \implies \|\tfrac{1}{2}(x+y)\| < 1\ . \tag{11}$$

Sei B die abgeschlossene Einheitskugel in E. Dann sind äquivalent:

(i) E ist strikt konvex,

(ii) der Rand von B enthält keine Strecken,

(iii) jeder Randpunkt von B ist Extremalpunkt, d.h. $\operatorname{ext} B = \partial B$,

(iv) jede Stützhyperebene von B trifft B in genau einem Punkt,

(v) aus $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ und $y \ne 0$ folgt $x = \lambda y$ für ein $\lambda \ge 0$.

7.5-14 Bemerkungen und Beispiele

(a) Innere Produkträume - speziell Hilberträume - sind gleichmäßig konvex.

(b) Die Lebesgue-Räume L^p und die Folgenräume ℓ^p sind für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex.

ℓ^1 und ℓ^∞ sind nicht strikt konvex, also auch nicht gleichmäßig konvex. Gleiches gilt für L^1 und L^∞.

(c) Gleichmäßig konvexe Räume sind strikt konvex.

Jeder endlich dimensionale strikt konvexe Raum ist gleichmäßig konvex.

Es gibt aber unendlich dimensionale strikt konvexe Räume, die nicht gleichmäßig konvex sind (12.4.K).

(d) Ist der Dualraum E^* strikt konvex, so auch E. Für reflexive Räume gilt auch die Umkehrung.

(e) Gleichmäßig konvexe Banachräume sind reflexiv (Milman-Pettis, 7.3-8). Die Umkehrung ist falsch.

7.5-15 Approximationsproblem

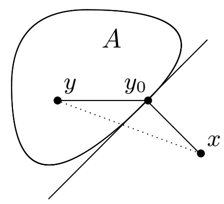
Sei weiterhin $(E, \|.\|)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$. Zur Approximation in Hilberträumen siehe Abschnitt 6.4-D.

Seien $x \in E$ und $\emptyset \neq A \subset E$.

Das allgemeine Approximationsproblem besteht darin, zu x den nächstgelegenen Punkt *(beste Approximation)* $y_0 \in A$ zu bestimmen, also

$$\text{gesucht:} \quad y_0 \in A \quad \text{mit} \quad \|x - y_0\| = d(x, A) = \min\{\, \|x - y\| \mid y \in A \,\} \ . \qquad (12)$$

A heißt *Existenzmenge bester Approximation*, wenn zu jedem $x \in E$ eine beste Approximation in A existiert.



Einfache Beispiele zeigen, dass eine beste Approximation i.a. nicht existiert (A offen) und wenn, dann nicht eindeutig bestimmt ist ($\mathbb{R}^2$ mit der Sup-Norm). Natürliche Bedingungen, die man an A stellt, sind die *Konvexität* und die *Vollständigkeit*.

Ist A konvex, so ist die Menge der besten Approximationen von x in A konvex.

7.5-16 Satz

Ist $A \subset E$ ein endlich dimensionaler affiner Teilraum (insbesondere vollständig und konvex), so besitzt jedes $x \in E$ eine beste Approximation in A.

Beispiele ($\mathbb{R}^2$ mit der Sup-Norm) zeigen, dass die beste Approximation auch in dieser Situation i.a. nicht eindeutig bestimmt ist.

7.5-17 Satz

Sei E ein reflexiver Banachraum und $A \subset E$ konvex und vollständig. Dann besitzt jedes $x \in E$ eine beste Approximation in A.

Insbesondere gilt dies für gleichmäßig konvexe normierte Räume E.

7.5-18 Satz

Sei E strikt konvex und $A \subset E$ konvex und vollständig. Dann besitzt jedes $x \in E$ höchstens eine beste Approximation in A.