12 Aufgaben zu linearen Funktionalen

12.1 Stetige Funktionale

(siehe auch 11.6.E, 12.2, 13.4.A)

$\boxed{\text{A}}$ Sei E ein topologischer Vektorraum und $\varphi\colon E \to \mathbb{K}$ $(\varphi \not\equiv 0)$ linear.
Man beweise die in Satz 7.1-3 angegebenen Äquivalenzen zur Stetigkeit von φ.

$\boxed{\text{B}}$ Ist $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ein stetiges Funktional auf ℓ^1 bzgl $\|.\|_1$? (bzgl $\|.\|_\infty$?)

$\boxed{\text{C}}$ Ist $x \in [a,b]$, so ist die Punktauswertung $\pi_x\colon f \mapsto f(x)$ auf $C[a,b]$ bzgl der Sup-Norm stetig, bzgl der Integralnorm unstetig.

$\boxed{\text{D}}$ $\varphi(f) := f(0) + f'(1)$ ist ein lineares Funktional auf $C^1[0,1]$. Berechne seine Norm bzgl $|\!|\!|f|\!|\!|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ und bzgl $|\!|\!|f|\!|\!|_2 := \max\big\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\big\}$.

$\boxed{\text{E}}$ Sei $g \in C[0,1]$. Bestimme $\|\varphi\|$ für $\varphi\colon C[0,1] \to \mathbb{K}$; $\varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$.

$\boxed{\text{F}}$ Ein lineares Funktional $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, wenn gilt

(i) für den Links-Shift $S_l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ ist $\varphi \circ S_l = \varphi$,

(ii) sind alle $x_k \geq 0$, so ist $\varphi(x) \geq 0$,

(iii) für die Eins-Folge $e = (1, 1, \ldots)$ ist $\varphi(e) = 1$.

Man beweise für Banachlimiten $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$:

1) Für alle $x = (x_n) \in \ell^\infty$ gilt $\underline{\lim}\, x_n \leq \varphi(x) \leq \overline{\lim}\, x_n$.

2) φ ist stetig mit Norm $\|\varphi\| = 1$.

3) φ ist nicht multiplikativ, d.h. i.a. gilt $\varphi(x \cdot y) \neq \varphi(x)\,\varphi(y)$.

4) Es gibt Banachlimiten.

$\boxed{\text{G}}$ Sei $0 < p < 1$ und $L^p := \big\{\ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \ \big|\ f \text{ messbar}, \ \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty\ \big\}$.
Mit der Metrik $d(f,g) := \int_0^1 |f-g|^p$ ist L^p ein metrischer Vektorraum.

$\emptyset$ und L^p sind die einzigen offenen konvexen Teilmengen von L^p.

Auf L^p ist nur die Nullform stetig, d.h. es ist $(L^p)^* = \{0\}$.

$\boxed{\text{H}}$ Sei E ein topologischer Vektorraum. Dann ist $E^* \neq \{0\}$ genau dann, wenn es eine konvexe offene Menge A gibt mit $\emptyset \neq A \subsetneqq E$.

$\boxed{\text{I}}$ Beweisen Sie den Darstellungssatz von Fréchet-Riesz (6.4-14) für Hilberträume.

In nicht-vollständigen Innenprodukt-Räumen ist dieser Satz i.a. falsch.

$\boxed{\text{J}}$ Nimmt $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{K}$, $\varphi(x) := x_n/2^n$ seine Norm auf der abgeschlossenen Einheitskugel $B \subset c_0$ an?

Lösungen:

$\boxed{\text{A}}$ Seien E ein topologischer Vektorraum und $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$.
Zu zeigen ist die Äquivalenz von:

(i) φ ist stetig.
(ii) $\mathsf{Ker}\,\varphi$ ist abgeschlossen.
(iii) $\mathsf{Ker}\,\varphi$ ist nicht dicht in E.
(iv) φ ist auf einer Null-Umgebung beschränkt.
(v) Es gibt eine offene Teilmenge $\emptyset \neq G \subset E$ mit $\varphi(G) \neq \mathbb{K}$.
(vi) $\mathsf{Re}\,\varphi$ ist stetig.

(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Ist φ stetig, so ist $N := \mathsf{Ker}\,\varphi$ als stetiges Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\} \subset \mathbb{K}$ abgeschlossen.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* : Ist $\varphi \neq 0$ und N abgeschlossen, so ist $\overline{N} = N \neq E$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* : Ist $\overline{N} \neq E$, so gibt es ein $x \in E$ und eine kreisförmige Null-Umgebung U mit $(x+U) \cap N = \emptyset$. Dann muss φ auf U beschränkt sein.

Da U kreisförmig und absorbierend ist, wäre nämlich sonst $\varphi(U) = \mathbb{K}$.
Also gäbe es ein $u \in U$ mit $\varphi(u) = -\varphi(x)$ bzw $\varphi(x+u) = 0$.
Dies widerspricht $(x+U) \cap N = \emptyset$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* : Ist φ auf der Null-Umgebung U durch $M > 0$ beschränkt, so ist

$$\tfrac{\varepsilon}{M}\, U \ \subset \ \varphi^{-1}\big(\{\, t \,|\, |t| \leq \varepsilon \,\}\big) \ . \tag{1}$$

Also ist φ stetig in 0 und damit in ganz E.

(i) $\Rightarrow$ *(v)* : Wenn φ stetig ist, so gibt es eine offene 0-Umgebung $G \subset E$ mit $\varphi(G) \subset B_1(0) \subsetneqq \mathbb{K}$.

(v) $\Rightarrow$ *(iii)* : Ist $\alpha \in \mathbb{K} \backslash \varphi(G)$, so ist $\varphi^{-1}(\alpha)$ nicht dicht in E. Für $a \in \varphi^{-1}(\alpha)$ ist $\mathsf{Ker}\,\varphi = \varphi^{-1}(0) = \varphi^{-1}(\alpha) - a$. Also ist auch $\mathsf{Ker}\,\varphi$ nicht dicht.

(i) $\Rightarrow$ *(vi)* : folgt aus *(i)* $\Leftrightarrow$ *(iv)*. Ist nämlich φ auf einer Null-Umgebung beschränkt, so auch $\mathsf{Re}\,\varphi$.

(vi) $\Rightarrow$ *(i)* : klar wegen $\varphi(x) = \mathsf{Re}\,\varphi(x) - i\mathsf{Re}\,\varphi(ix)$ für alle $x \in E$.

$\boxed{\text{B}}$ Wie üblich sei $\ell^1 = \big\{\, x = (x_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\big|\; \sum |x_k| < \infty \,\big\}$. Dann ist

$$\varphi\colon \ell^1 \to \mathbb{K} \quad ; \qquad \varphi(x) \ := \ \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k \ . \tag{2}$$

wohl-definiert und linear.

- Bzgl der Sup-Norm auf ℓ^1 ist φ ist aber nicht beschränkt, also nicht stetig!

Zum Beweis seien die Folgen $x^{(n)} = (x_k^n)_k \in \ell^1$ definiert durch

$$x_k^{(n)} := 1 \quad \text{für } k \leq n \quad \text{und} \quad x_k^{(n)} := 0 \ \text{ sonst.} \tag{3}$$

Dann ist $\|x^{(n)}\|_\infty = 1$. Also liegen alle $x^{(n)}$ in der Einheitskugel von $\big(\ell^1, \|.\|_\infty\big)$.

Aber es gilt $\varphi(x^{(n)}) = \sum_k x_k^{(n)} = n \to \infty$. Also ist φ nicht beschränkt.

• Wegen $|\varphi(x)| \le \sum |x_k| = \|x\|_1$ ist φ bzgl der üblichen 1-Norm auf ℓ^1 beschränkt und damit stetig.

$\boxed{\text{C}}$ Sei $x \in [a,b]$ und $\pi_x(f) := f(x)$ für alle $f \in C[a,b]$. Wegen

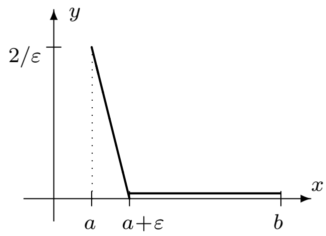
$$|\pi_x(f)| \;=\; |f(x)| \;\le\; \|f\|_\infty \;=\; \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \tag{4}$$

ist die Punktauswertung π_x stetig bzgl der Supremums-Norm.

Es gibt aber stetige Funktionen $f \in C[a,b]$ mit

$$\|f\|_1 \;=\; \int_a^b |f(t)|\,dt \;=\; 1 \tag{5}$$

und beliebig großem $f(x)$. Also ist π_x bzgl der Integralnorm unstetig.



$\boxed{\text{D}}$ $\varphi(f) := f(0) + f'(1)$ ist ein Funktional auf $C^1[0,1]$.

• Bzgl $|||f|||_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ ist φ stetig mit $\|\varphi\| = 1$!

Für $f \in C^1[0,1]$ gilt $|\varphi(f)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = |||f|||_1$. Also ist $\|\varphi\| \le 1$.

Für $e(x) :\equiv 1$ gilt andererseits $|||e|||_1 = 1$ und $|\varphi(e)| = 1$, also ist $\|\varphi\| = \sup\big\{\, |\varphi(f)| \;\big|\; |||f|||_1 = 1 \,\big\} \ge 1$.

• Bzgl $|||f|||_2 := \max\big\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\big\}$ ist φ stetig mit $\|\varphi\| = 2$!

Für $f \in C^1[0,1]$ gilt $|\varphi(f)| \le |f(0)| + |f'(1)| \le \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \le 2|||f|||_2$. Also ist $\|\varphi\| = \sup\big\{\, |\varphi(f)| \;\big|\; |||f|||_2 = 1 \,\big\} \le 2$.

Für $g(x) := (x - \frac12)^2 + \frac34$ gilt andererseits $|||g|||_2 = 1$ und $|\varphi(g)| = 2$, also $\|\varphi\| \ge 2$.

Bemerkung: Die beiden Normen sind auf $C^1[0,1]$ äquivalent. Also ist φ genau dann bzgl der einen Norm stetig, wenn es bzgl der anderen stetig ist.

$\boxed{\text{E}}$ Sei $g \in C[0,1]$ und $M(g) := \int_0^1 |g(t)|\,dt$. Sei

$$\varphi\colon C[0,1] \to \mathbb{K} \quad \text{def. durch} \quad \varphi(f) := \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \tag{6}$$

und $C[0,1]$ wie üblich mit der Sup-Norm versehen. Dann gilt für $f \in C[0,1]$

$$|\varphi(f)| \;\le\; \int_0^1 |f(t)|\,|g(t)|\,dt \;\le\; \|f\|_\infty \cdot M(g) \; . \tag{7}$$

Also ist $\|\varphi\| \le M(g)$. Für $\varepsilon > 0$ sei $f_\varepsilon(t) := \frac{\overline{g(t)}}{|g(t)|+\varepsilon}$. Dann ist $f_\varepsilon \in C[0,1]$ und $\|f_\varepsilon\|_\infty \le 1$. Ferner ist

$$|\varphi(f_\varepsilon)| \;=\; \int_0^1 \frac{|g(t)|^2}{|g(t)|+\varepsilon}\,dt \;\ge\; \int_0^1 \frac{|g(t)|^2-\varepsilon^2}{|g(t)|+\varepsilon}\,dt \;=\; M(g)-\varepsilon\ . \tag{8}$$

Also ist $\|\varphi\| \ge M(g) - \varepsilon$.

$\boxed{\text{F}}$ Wir betrachten $\ell^\infty \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(F.1) Sei $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ ein Banachlimes, $M := \overline{\lim}\, x_n < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $M + \varepsilon - x_n \ge 0$ ab einem n_0. Wegen $\varphi \circ S_l^{n_0} = \varphi$ ist

$$\varphi\big((M+\varepsilon)e - x\big) \;=\; (M+\varepsilon)\,\varphi(e) - \varphi(x) \;\ge\; 0\ . \tag{9}$$

Da ε beliebig war, folgt $\varphi(x) \le M$. Analog zeigt man $\varphi(x) \ge \underline{\lim}\, x_n$.

Insbesondere gilt $\varphi(x) = \lim x_n$ für alle $x = (x_n) \in c \subset \ell^\infty$.

(F.2) Ist $\|x\|_\infty \le 1$, so ist $-1 \le \underline{\lim}\, x_n \le \overline{\lim}\, x_n \le 1$. Wegen **(F.1)** folgt $|\varphi(x)| \le 1$. Also sind Banachlimiten φ stetig mit $\|\varphi\| \le 1$.
Wegen $\varphi(e) = 1$ ist $\|\varphi\| = 1$.

(F.3) Sei z.B. $x := (a,b,a,b,\ldots)$ und $y := S_l x = (b,a,b,a,\ldots)$. Dann ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ und $\varphi(x+y) = a+b$, also $\varphi(x) = \frac{a+b}{2}$. Aber i.a. ist $(\varphi(x))^2 \ne \varphi(x\cdot y) = ab$. Also sind Banachlimiten nicht multiplikativ.

(F.4) Für $x = (x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sei $\mu_x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch $\mu_x(n) := \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$. Es gilt ($\curvearrowright$ Analysis I) :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n \;\le\; \underline{\lim}_{n\to\infty}\, \mu_x(n) \;\le\; \overline{\lim}_{n\to\infty}\, \mu_x(n) \;\le\; \overline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n\ . \tag{10}$$

$q\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $q(x) := \overline{\lim}_{n\to\infty}\, \mu_x(n)$. q ist ein sublineares Funktional auf ℓ^∞. Sei

$$Y \;:=\; \big\{\, x \in \ell^\infty \;\big|\; \lim_{n\to\infty} \mu_x(n) \text{ existiert} \,\big\} \;\subset\; \ell^\infty \tag{11}$$

und $f\colon Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} \mu_x(n)$.

f ist ein stetiges lineares Funktional auf Y und es ist $f(x) \le q(x)$ für alle $x \in Y$. Nach Hahn-Banach (7.2-2) existiert ein lineares Funktional $\varphi \in (\ell^\infty)^*$ mit $\varphi(x) \le q(x)$ für alle $x \in \ell^\infty$ und $\varphi(x) = f(x)$ für alle $x \in Y$.

Wegen (10) gilt $\varphi(e) = 1$ und $\varphi(x) \ge 0$ falls alle $x_n \ge 0$.

Ferner gilt $\varphi(x) \le q(x) \le \overline{\lim}\, x_n$ und

$$\underline{\lim}\, x_n = -\,\overline{\lim}(-x_n) \le -\,\overline{\lim}\,\mu_{-x}(n) = -q(x) \le -\varphi(-x) = \varphi(x)\ . \tag{12}$$

Dann muss aber $\varphi \circ S_l = \varphi$ sein. (Beweis!) Also ist φ ein Banachlimes.

$\boxed{\text{G}}$ Dass $L^p := \{ f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}, \int_0^1 |f(t)|^p dt < \infty \}$ für $0 < p < 1$ mit der translationsinvarianten Metrik $d(f,g) := \int_0^1 |f-g|^p$ ein metrischer Vektorraum ist, zeigt man analog wie für ℓ^p in Aufgabe 11.6.J.

(G.1) Sei $\emptyset \neq G \subset L^p$ offen und konvex und o.B.d.A. $0 \in G$. Sonst kann man G verschieben. Sei $f \in L^p$ beliebig. Z.z. $f \in G$.

Sei $\varepsilon > 0$ derart, dass $B_\varepsilon(0) \subset G$.

Wegen $0 < p < 1$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f\|_p := d(f,0) < \varepsilon\, n^{1-p}$.
(Achtung: $\|.\|_p$ ist für $0 < p < 1$ keine Norm!)

Wegen der Stetigkeit von $f \mapsto \int_0^x |f(t)|^p\, dt$ existiert eine Zerlegung

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1 \quad \text{mit} \quad \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f(t)|^p\, dt = \tfrac{1}{n}\, \|f\|_p \tag{13}$$

für $j = 1, \ldots, n$. Sei

$$f_j \in L^p \qquad \text{def. durch} \qquad f_j(t) \;:=\; \begin{cases} n\, f(t) & \text{für } x_{j-1} \le t \le x_j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{14}$$

Dann ist $\|f_j\|_p \;= n^{p-1} \|f\|_p < \varepsilon$, also $f_j \in G$.

Da G konvex ist, ist dann auch $f = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} f_j \in G$.

(G.2) Auf L^p ist nur die Nullform stetig, also $(L^p)^* = \{0\}$.

Dies folgt mit Aufgabe 12.1.H direkt aus **(G.1)**.

Bemerkung: Nach Hahn-Banach (7.2-6) gibt es in nicht-trivialen lokalkonvexen Räumen stets stetige lineare Funktionale $\varphi \not\equiv 0$.

Also kann L^p nicht lokalkonvex sein. Dies kann man auch direkt wie in Aufgabe 11.6.J für ℓ^p zeigen.

Bemerkung: Auf dem Folgenraum ℓ^p mit $0 < p < 1$ (11.6.J) gibt es nicht-triviale stetige Linearformen, z.B. sind die Projektionen $\pi_j(x) := x_j$ stetig. Nachrechnen!

$\boxed{\text{H}}$ Sei E ein topologischer Vektorraum.

Ist $\varphi \in E^*$, so ist $A := \{ x \in E \,|\, |\varphi(x)| < 1 \}$ nichtleer, offen und konvex. Ist $\varphi \neq 0$, so ist $A \neq E$.

Sei umgekehrt $\emptyset \neq A \neq E$ offen und konvex. Sei zunächst $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sei $y_0 \notin A$ und o.B.d.A. $0 \in A$. Sei $p_A\colon E \to [0,\infty]$ das Minkowski-Funktional (5.3-6) von A, also

$$p_A(x) \;=\; \begin{cases} \inf\{\varrho > 0 \,|\, x \in \varrho A\} & \text{falls } \exists\, \varrho > 0 \;:\; x \in \varrho A\,, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{15}$$

Wegen $y_0 \notin A$ und der Konvexität von A ist $p_A(y_0) \ge 1$.

Nach 5.3-8 ist p_A stetig.

Sei Y der eindimensionale Unterraum $Y := \mathsf{lin}\,\{y_0\}$ und

$$\varphi\colon Y \to \mathbb{R} \qquad \text{def. durch} \qquad \varphi(t\,y_0) := t\,p_A(y_0)\ . \tag{16}$$

Dann ist $\varphi(y) \le p_A(y)$ für alle $y \in Y$, denn für $t \le 0$ ist $\varphi(ty_0) \le 0 \le p_A(ty_0)$ und für $t > 0$ ist $\varphi(ty_0) = p_A(ty_0)$.

Nach Hahn-Banach gibt es eine lineare Fortsetzung $\widehat{\varphi}\colon E \to \mathbb{R}$ von φ mit $\widehat{\varphi} \le p_A$. Nach 5.3-8 ist $\widehat{\varphi}$ stetig und wegen $\widehat{\varphi}(y_0) = p_A(y_0) \ge 1$ ist $\widehat{\varphi} \ne 0$.

Der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ folgt mit Hilfe der Bemerkungen 7.1-12.

$\boxed{\text{I}}$ **(I.1)** Sei H ein Hilbertraum und $y \in H$. Dann sei

$$Ty\colon H \to \mathbb{K} \quad \text{definiert durch} \quad Ty(x) \ := \ \big\langle x, y\big\rangle\ . \tag{17}$$

Die Linearität von Ty rechnet man nach. Die Stetigkeit folgt aus der Schwarzschen Ungleichung

$$\big|Ty(x)\big| \ = \ \big|\,\big\langle x, y\big\rangle\,\big| \ \le \|x\| \cdot \|y\|\ , \quad \text{also} \quad \|Ty\| \ \le \|y\|\ . \tag{18}$$

Also ist $Ty \in H^*$ und damit

$$T\colon H \to H^*\ ; \quad y \mapsto Ty \tag{19}$$

wohldefiniert. Dass T konjugiert linear ist, rechnet man direkt nach. Es ist

$$\big|Ty(y)\big| \ = \ \big\langle y, y\big\rangle \ = \|y\|^2\ , \quad \text{und damit} \quad \|Ty\| \ \ge \|y\|\ . \tag{20}$$

Wegen (18) ist T isometrisch und infolgedessen auch injektiv.

Bleibt die Surjektivität von T zu zeigen. Darin steckt - wie oft bei Darstellungssätzen - die Hauptarbeit.

Sei $0 \ne x^* \in H^*$ und P die orthogonale Projektion auf den abgeschlossenen Unterraum $\mathsf{Ker}\,x^*$ (vgl 6.4-27). Wähle $y_1 \in H$ mit $x^*(y_1) = 1$ und definiere

$$y_2 \ := \ y_1 - Py_1 \quad ; \qquad y \ := \ \tfrac{1}{\|y_2\|}\,y_2\ . \tag{21}$$

Dann ist $x^*(y_2) = 1$ und $\big\langle z, y_2\big\rangle = 0$ für alle $z \in \mathsf{Ker}\,x^*$. Für $x \in H$ folgt

$$x \ = \ x - x^*(x)y_2 + x^*(x)y_2\ , \tag{22}$$

$$\big\langle x, x^*\big\rangle \ = \ \big\langle x^*(x)y_2, y_2\big\rangle \ = \ x^*(x)\,\|y_2\|^2\ , \tag{23}$$

$$x^*(x) \ = \ \big\langle x, \|y_2\|^{-2}y_2\big\rangle \ = \ \big\langle x, y\big\rangle \ = \ Ty(x)\ . \tag{24}$$

Also ist $x^* = Ty$ und wir sind fertig.

(I.2) Wir betrachten den (nicht vollständigen) Unterraum

$$c_c \;:=\; \big\{\, x \in \ell^2 \;\big|\; x_k \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } k \,\big\} \;\subset\; \ell^2 \tag{25}$$

mit dem üblichen inneren Produkt $\langle x, y\rangle = \sum x_k\, \overline{y_k}$. Durch

$$x^*\colon c_c \to \mathbb{K} \quad ; \qquad x^*(x) \;:=\; \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\, x_k \tag{26}$$

wird ein stetiges lineares Funktional auf c_c definiert. Es ist die Einschränkung eines Funktionals $\varphi \in (\ell^2)^*$. Dies x^* lässt sich nicht in der Form $x^*(x) = \langle x, y\rangle$ mit einem $y \in c_c$ beschreiben.

Jedes $y \in c_c$ ist ja von der Bauart $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e^{(k)}$ mit den Einheitsfolgen $e^{(k)}(j) = \delta_j^k$. Dann ist aber

$$\langle e^{(n+1)}, y\rangle \;=\; 0 \;\neq\; \tfrac{1}{n+1} \;=\; x^*(e^{(n+1)}) \;. \tag{27}$$

$\boxed{\text{J}}$ $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{K}$, $\varphi(x) := \sum x_k/2^k$ nimmt seine Norm nicht auf der abgeschlossenen Einheitskugel von c_0 an.

Für die Einsfolge $e = (1, 1, 1, \ldots)$ und die Projektionen P_n (A.7-1) gilt nämlich $\|P_n e\|_\infty = 1$ und $\varphi(P_n e) = 1 - 2^{-n} \to 1$.

Es ist aber $|\varphi(x)| \leq \sum |x_k|/2^k < 1$ für alle $x \in c_0$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$.